

Ministère de l'éducation	Devoir de synthèse n°2	Mr. FATNASSI BECHIR
Lycée secondaire de Korba	Durée trois heures	4.Tech. Le 11.5.2018

Exercice N°1 : (3 pts)

Cet exercice est un Q.C.M (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie, **en justifiant**, la bonne réponse.

Question 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ et S le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe C de f autour de l'axe (Ox) . Alors le volume engendré par le solide S est égal à :

- a) $\left(\frac{1+3e^{-2}}{4}\right)\pi$ b) $\left(\frac{1-3e^{-2}}{4}\right)\pi$ c) $(1+e^2)\pi$

Question 2 :

Soit f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x$ alors la fonction f est :

- a) strictement croissante sur \mathbb{R} b) strictement décroissante sur \mathbb{R} c) constante sur \mathbb{R}

Question 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Alors $f''(x) =$

- a) $f''(x) = e^{-x^2}$ b) $f''(x) = -2x e^{-x^2}$ c) $f''(x) = \int_0^x -2t e^{-t^2} dt$

Exercice n°2 : (5 pts)

Tous les résultats sont arrondis à 10^{-2} près

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires, exprimés en milliers de dinars, réalisé par une entreprise pour les années 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires en milliers de dinars : y_i	55	58	64	85	105	112

1°/ a / Représenter le nuage de points, de la série (X, Y) , dans un repère orthogonal.

b / Un ajustement affine de cette série est – il justifié ?

c / Donner les coordonnées du point moyen et le placer dans le repère.

2°/ a / Calculer la covariance de la série (X, Y) .

b / Calculer le coefficient de corrélation de la série (X, Y) .

c / Interpréter le résultat obtenu.

3°/ a / Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des Moindres carrés.

4°/ a / Estimer le chiffre d'affaires réalisé en 2009.

b / Déterminer après combien d'années (à partir de 2001) le chiffre d'affaires devient supérieur ou égal à 175 milliers de dinars.

Exercice n°3 : (5 Pts)

Soit U la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$: $U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-U_n^2}}$

1°/ a / Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$: $0 \leq U_n < \sqrt{2}$

b / Montrer que pour tout entier naturel n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(U_n - 2)^2}{4 - U_n^2}$ et en déduire que U est croissante

c / Montrer que U est une suite convergente et calculer sa limite ℓ

2°/ On considère la suite V définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n^2}{2 - U_n^2}$

a / Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b / Ecrire V_n en fonction de n et en déduire que pour tout $n \geq 0$: $U_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

c / Retrouver la limite ℓ de U_n .

3°/ Soit pour tout $n \geq 1$: $W_n = \ln(U_n)$ et $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

a / Montrer que $S_n = \frac{1}{2}(n \ln 2 - \ln(n+1))$

b / Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice n°4 : (7 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0, e] \cup]e, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{1 - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq e \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1°/ a / Montrer que f est continue à droite en 0.

b / Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat obtenu.

2°/ a / Calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus.

b / Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

c / Etudier la position de (C_f) et (Δ) .

3°/ a / Montrer que pour tout $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$.

b / Dresser le tableau de variation de f .

4°/ a / Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

b / Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = 1 - x + x \ln x$.

Etudier le sens de variation de h et en déduire son signe.

c / Déterminer la position relative de (C_f) et (T) .

d / Tracer (Δ) ; (T) et (C_f)

5°/ a / A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \ln x \, dx = \frac{\ln 2}{8} - \frac{3}{16}$

b / Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a : $2x \leq f(x) \leq x + 1 - x \ln x$

c / Soit A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites

d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$. Montrer que : $\frac{3}{4} \leq A \leq \frac{17}{16} - \frac{\ln 2}{8}$