Ministère de l'éducation	Devoir de synthèse n°3	Mr. FATNASSI BECHIR
Lycée secondaire de Korba	Durée trois heures	4.Tech 2 . Le 11.5.2018

Exercice N°1 : (3 pts)

Cet exercice est un Q.C.M (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

Question 1

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{x}.e^{-x}$ et S le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe C de f autour de l'axe (Ox). Alors le volume engendré par le solide S est égal à :

a) $\left(\frac{1+3e^{-2}}{4}\right)\pi$ **b)** $\left(\frac{1-3e^{-2}}{4}\right)\pi$ **c)** $\left(1+e^{2}\right)\pi$

Question 2

Soit f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ alors la fonction f est :

a) strictement croissante sur IR **b)** strictement décroissante sur IR **c)** constante sur IR

Question 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$. Alors $f''(x)=$

a) $f''(x)=e^{-x^2}$ **b)** $f''(x)=-2x\,e^{-x^2}$ **c)** $f''(x)=\int_0^x -2t\,e^{-t^2}dt$

Exercice N°2 **5 Pts**

Soit U la suite réelle définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{4-U_n^2}} \end{cases}$; pour tout $n\geq 0$

1°/ a / Montrer, par récurrence, que pour tout $n\geq 0$: $0\leq U_n<\sqrt{2}$

b / Montrer que pour tout entier naturel n : $U_{n+1}^2-U_n^2=\dfrac{(U_n-2)^2}{4-U_n^2}$ et déduire que U est croissante

c / Montrer que U est une suite convergente et calculer sa limite ℓ

2°/ On considère la suite V définie sur IN par : $V_n=\dfrac{U_n^2}{2-U_n^2}$

a / Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b / Ecrire V_n en fonction de n et en déduire que pour tout $n\geq 0$: $U_n=\sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$

c / Retrouver la limite ℓ de U_n .

3°/ Soit pour tout $n\geq 1$: $W_n=\ln(U_n)$ et $S_n=W_1+W_2+....+W_n$.

a / Montrer que $S_n=\dfrac{1}{2}\left(n\ln 2-\ln(n+1)\right)$

b / Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$

Exercice N°3 : **(7 pts)**

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,,e\,]\cup]\,e\,,+\infty\,[$ par : $\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{1}{1-\ln(x)} & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq e \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°/ a / Montrer que f est continue en 0.

b / Etudier la dérivabilité de f en 0 ? Interpréter le résultat obtenu.

2°/ a / Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$ et interpréter le résultat .

b / Montrer que la droite $(\Delta): y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

c / Etudier la position de (C_f) et (Δ).

3°/ a / Montrer que pour tout $x\in]\,0\,,e\,[\cup]\,e\,,+\infty\,[$: $f'(x)=1+\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

b / Dresser le tableau de variation de f.

4°/ a / Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

b / Soit h la fonction définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par : $h(x)=1-x+x\ln x$.

Etudier le sens de variation de h et en déduire son signe.

c / Déterminer la position relative de (C_f) et (T).

d / Tracer (Δ) ; (T) et (C_f)

5°/ a / A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln x\,dx=\dfrac{\ln 2}{8}-\dfrac{3}{16}$

b / Montrer que pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ on a : $2x\leq f(x)\leq x+1-x\ln x$

c / Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$. Montrer que : $\dfrac{3}{4}\leq\mathcal{A}\leq\dfrac{17}{16}-\dfrac{\ln 2}{8}$.

Exercice N°4 **6 Pts**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x+2)e^{-x}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°/ a / Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

b / Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°/ Montrer que pour tout réel x : $f'(x)=(-x-1)e^{-x}$ et déduire le tableau de variation de f

3°/ Calculer $f(-2)$ et $f(0)$ et tracer (C_f)

4°/ a / A l'aide d'une intégration par partie , calculer : $I=\int_0^1 (x+2)e^{-x}\,dx$; $J=\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

et déduire que : $\int_0^1 (x+2)^2 e^{-2x}\,dx=3-\dfrac{11}{2}e^{-2}+J$

b / Calculer l'aire de la partie P limitée par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites :

$x=0$ et $x=1$

c / Soit S le solide obtenu par la rotation de P autour de l'axe $(O,\vec{i})$.Calculer le volume de S