Problème N°1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ et (C) sa courbe

Représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est définie sur $]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$.

b) Montrer que la droite d'équation : $x = -1$ est un axe de symétrie de (C).

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement

Le résultat obtenu .

b) Montrer que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et dresser son tableau de variation

relativement à l'intervalle$[1; +\infty[$.

3) a) Montrer que la droite d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique

à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Construire(C).

4) Construire dans le même repère la courbe (C') de la fonction : $-f$

5) Soit $(\Gamma) = (C) \cup (C')$

a) Soit $M(x, y)$ un point du plan ;

Montrer que : $M(x, y) \in (\Gamma)$ si et seulement si $y^2 = x^2 + 2x - 3$

b) Soit $S(-1, 0)$ et R' le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que l'équation de (Γ) dans R' est : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.

6) Soit les deux vecteurs : $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et soit $R'' = (S, \vec{u}, \vec{v})$

a) Montrer que R'' est un repère du plan .

b) Montrer que si un pont M a pour coordonnées (X, Y) selon le repère R' et (X', Y') dans le repère R'' alors : $X = X' - Y'$ et $Y = X' + Y'$.

c) En déduire qu'une équation de (Γ) dans le repère R'' est $Y' = -\frac{1}{X'}$

d) Déduire la nature de (Γ).

Problème N°2

I) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$ et et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}; f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$

b) Déduire que (C_f) admet une asymptote oblique que l'on précisera .

2) Montrer que le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie de (C_f).

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit k la fonction définie par : $k(x) = |x - 1| + \frac{4}{x-1}$

a) Dresser le tableau de variation de k.

b) Montrer que la courbe (C_k) de k admet deux asymptotes obliques .

c) Tracer (C_k) dans le même repère .

II) On pose $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

et on désigne par (C_g) sa courbe dans le même repère .

1) Montrer que la droite (Δ) : $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_g)

2) Montrer que la droite (D) : $y = -x + 2$ est une asymptote de (C_g) au $V(-\infty)$

3) Dresser le tableau de variation de g.

4) Tracer (C_g).

III) Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = f(x) - 4 \ si \ x > 2 \\ h(x) = g(x) \qquad si \ x \leq 2 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 2.

2) Dresser le tableau de variation de h.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer : $h\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et $h\left(\frac{n}{n+2}\right)$

4) Tracer la courbe (C_h) de h dans le même repère .

Correction problème N°1 :

1) a) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2+2x-3 \geq 0\}$

On remarque que : $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors : $D_f =]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$.

b) Montrer que la droite d'équation : $x = -1$ est un axe de symétrie de (C).

- $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 1 \; ou \; x \leq -3$

$$\Leftrightarrow (-x) \leq -1 \; ou (-x) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow (-2-x) \leq -3 \; ou (-2-x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -2-x \in D_f$$

- Soit $x \in D_f$

$$f(-2-x) = \sqrt{(-2-x)^2+2(-2-x)-3}$$

$$= \sqrt{4+4x+x^2-4-2x-3}$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3}$$

$$= f(x)$$

Conclusion : la droite d'équation : $x = -1$ est un axe de symétrie de (C).

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement

Le résultat obtenu

Soit $x \in]1;+\infty[$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}} = +\infty$$

Donc f n'estdérivable à droite en 1 , et (C) admet au point d'abscisse 1 une demi − tangente verticale dirigé vers le haut .

b) Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et dresser son tableau de variation relativement à l'intervalle $[1;+\infty[$.

Puisque la fonction $x \to x^2+2x-3$ est dérivable et strictement positive sur $]1;+\infty[$, alors f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in\ ]1;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}} > 0$$

alors f est strict croissante sur $[1;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-3} = +\infty$$

Alors le tableau de variation de f pour $x \in [1;+\infty[$;

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) Montrer que la droite d'équation : $y = x+1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x-3} - (x+1)$$

$$= \frac{x^2+2x-3-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x+1}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+x+1}$$

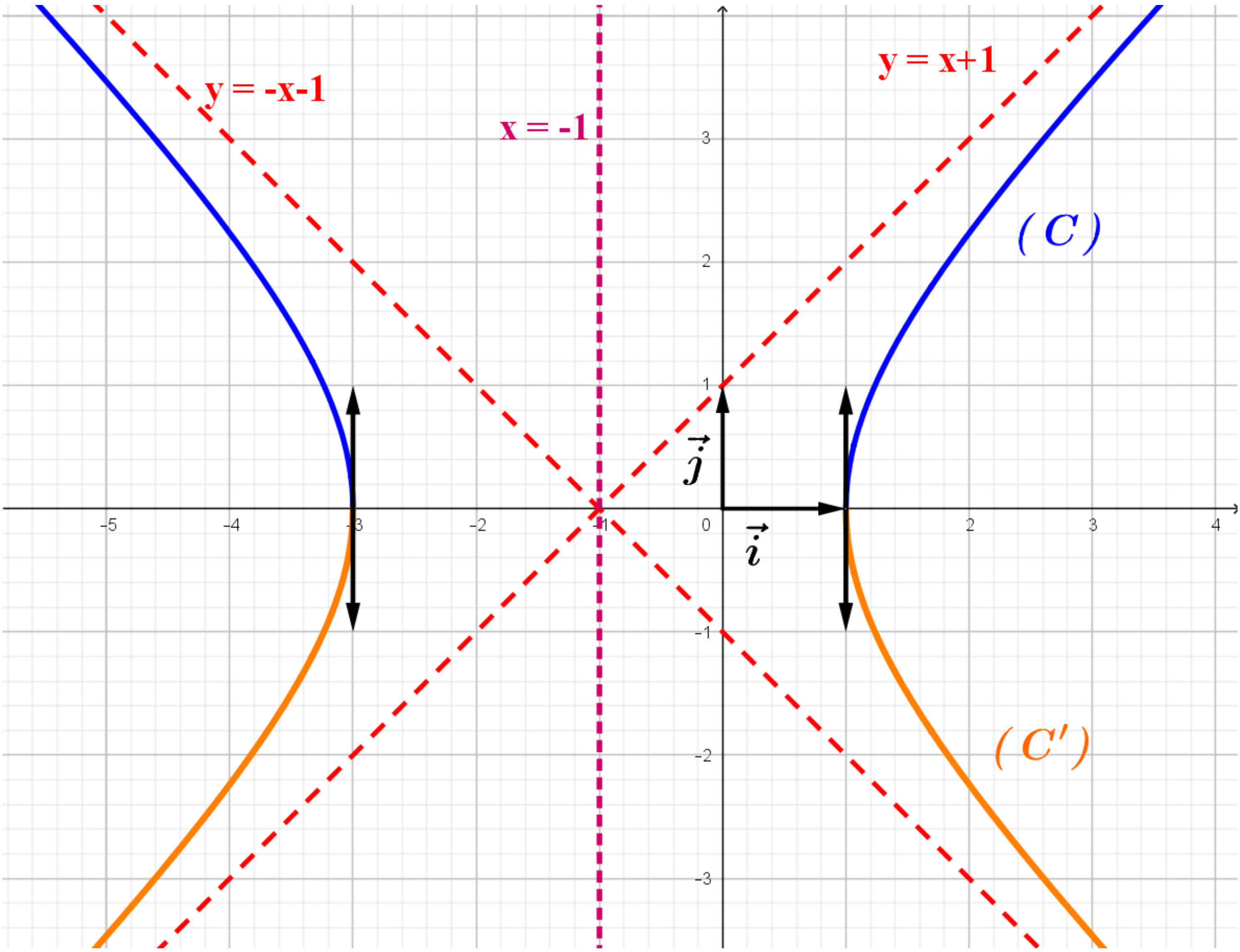
$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+x+1} = 0$$

Conclusion : la droite d'équation : $y = x+1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Construire (C).

4) Construire dans le même repère la courbe (C') de la fonction : $-f$

$(C') = S_{(O\vec{\imath})}(C)$



5) Soit $(\Gamma) = (C) \cup (C')$

a) Soit $M(x,y)$ un point du plan ;

Montrer que : $M(x,y) \in (\Gamma)$ si et seulement si $y^2 = x^2 + 2x - 3$

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow M \in (C) \text{ ou } M \in (C')$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+2x-3} \text{ ou } y = -\sqrt{x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2x - 3$$

b) Soit $S(-1,0)$ et R' le repère orthonormé $(S,\vec{i},\vec{j})$

Montrer que l'équation de (Γ) dans R' est : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Soit M un point du plan ;

$M(x,y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$

On a : d'une part : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

D'autre part : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$

$$= -\vec{i} + X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$= (-1+X)\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$$

Or : $y^2 = x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow y^2 = (x+1)^2 - 4 \Leftrightarrow Y^2 = X^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$

Conclusion : l'équation de (Γ) dans R' est : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

6) Soit les deux vecteurs : $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et soit $R'' = (S,\vec{u},\vec{v})$

a) Montrer que R'' est un repère du plan .

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

donc : $R'' = (S,\vec{u},\vec{v})$ est un repère cartésien du plan

b) Montrer que si un pont M a pour coordonnées (X,Y) selon le repère R' et (X',Y') dans le repère R'' alors : $X = X' - Y'$ et $Y = X' + Y'$.

$M(X',Y')$ **dans le repère** $R'' \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = X'\vec{u} + Y'\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = X'(\vec{i} + \vec{j}) + Y'(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = (X' - Y')\vec{i} + (X' + Y')\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = X' - Y' \\ Y = X' + Y' \end{cases}$$

c) En déduire qu'une équation de (Γ) dans le repère R'' est $Y' = -\frac{1}{X'}$

$$M(X,Y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(X' - Y')^2}{4} - \frac{(X' + Y')^2}{4} = 1$$

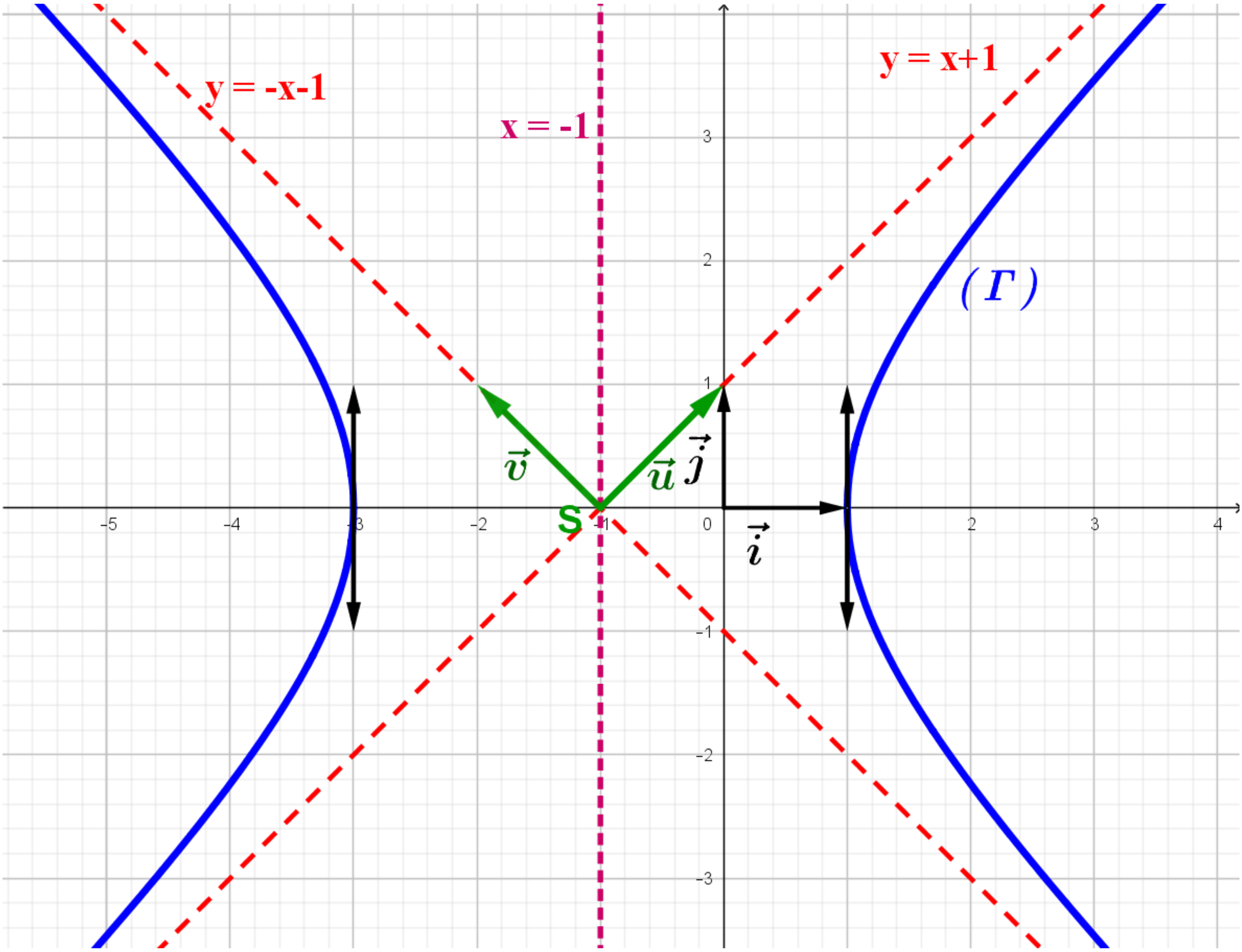
$$\Leftrightarrow \frac{-4X'Y'}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow Y' = -\frac{1}{X'}$$

Conclusion : une équation de (Γ) dans le repère R'' est $Y' = -\frac{1}{X'}$

d) Déduire la nature de (Γ).

une équation de (Γ) est de la forme $Y' = -\frac{1}{X'}$ dans le repère R'' donc (Γ) est une hyperbole



y = -x-1
x = -1
y = x+1
(Γ)
$\vec{v}$
$\vec{u}$
$\vec{j}$
$\vec{i}$
S
-5
-4
-3
-2
-1
0
2
3
4
3
2
1
-1
-2
-3