Série N°10

Exercice n° 1 :

1. a/ Vérifier que $\left(6e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = -18 + 18\sqrt{3}i$

   b/ Résoudre dans l'équation (E) :Z^2-(3-$\sqrt{3}i$) Z+6-6$\sqrt{3}$ i = 0.

   On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. On considère les nombres complexes a= -2$\sqrt{3}$ i et b=3+$\sqrt{3}$ i.
   Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et b.
   a. Donner l'écriture exponentielle de b.
   b. Le point A est représenté sur l'annexe ci-jointe.
      Construire le point B sur l'annexe.
3. a/ Vérifier que a et b sont des racines cubiques du nombre complexe 24$\sqrt{3}$ i.
4. b/ Soit c la troisième racine cubique de 24$\sqrt{3}$ i et C le point image de c.
   construire le point C sur l'annexe.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur]1,2] par f(x)= $\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

On désigne par ζ sa courbe dans un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (Unité graphique 2cm).

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Montrer que f est dérivable sur] 1 , 2[et que f'(x)=$\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}$ pour tout x ∈]1 , 2[.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans] 1,2] et vérifier que 1,5<α<1,6.
5. Tracer ζ
6. a/ Montrer que f réalise une bijection de]1,2] sur un intervalle J que l'on précisera.
   b/ Tracer ζ' la courbe f^{-1} dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
   c/ expliciter $f^{-1(x)}$ pour x ∈ J.

Exercice n°3 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+7}{u_n+1}, n \geq 0 \end{cases}$

1) Soit la fonction f : x $\rightarrow \frac{x+7}{x+1}$

l'annexe (I) ci-jointe représente une partie de la courbe C_f de la fonction f.

a/ Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3.

b/ Que peut-on conjecturer ?

2) Montrer que pour tout n $\in$ IN, $2 \leq u_n \leq 3$.

3) Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors elle converge vers $\sqrt{7}$.

4) a/ Montrer que f est dérivable sur $[2, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 2$ $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

b/ Montrer que pour tout n $\in$ IN, $|u_{n+1}-\sqrt{7}| \leq \frac{2}{3}\ |u_n-\sqrt{7}|$

c/ Montrer que pour tout n $\in$ IN, $|u_n-\sqrt{7}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d/ En déduire $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty} u_n$.

e/ Vérifier que u_6 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.

Exercice 4 :

1) Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

On désigne par Cf la courbe de f dans un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

a/ Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que pour tout $x>1$, $f'(x)=\frac{-1}{(\sqrt{x+1})^3}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Tracer C_f dans l'annexe (II) ci-jointe.

d/ Placer sur l'axe $(O,\vec{\imath})$ le réel α, abscisse du point de C_f d'ordonnée $\frac{3}{2}$.

e/ Déterminer la valeur de α.

2) Soit g la fonction définie sur [0,3] par $g(x)=\sin(\pi f(x))$.

On désigne par C_f la courbe de g dans le même repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

a/ Détermine f([0,3])

b/ Montrer que la fonction g est dérivable sur [0,3] et calculer g'(x)

c/ Dresser le tableau de variation de f.

d/ La droite Δ construite dans l'annexe (II) a pour équation $y=\frac{\pi}{8}x$.

Utiliser cette droite pour construire les demi-tangentes à C_g aux points d'abscisses 0 et 3.

e/ Tracer C_g.

Exercice 5 :

1) calculer $(-1+i\sqrt{3})^2$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $2Z^2-a(7+i\sqrt{3})Z+2a^2(3+i\sqrt{3})=0$ où a est un nombre complexe non nul.

a/ Déterminer les solutions Z_1 et Z_2 de l'équation (E).

b/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs a, Z_1 et Z_2.

Montrer que le triangle AM_1M_2 est équilatéral.

Exercice 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) Déterminer les racines cubiques de 216.
2) On désigne par A, B et C les points images de ces racines.
   On notera A le point dont l'affixe est réel et B celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive.
   Construire A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$
3) Soit F le point d'intersection de la droite (AC) et l'axe $(O,\ \vec{v})$
   a/ Déterminer Z_F l'affixe de F.
   b/ Vérifier que $(Z_F)^3=24\sqrt{3}i$.
   c/ Déterminer alors les deux autres racines cubiques de $24\sqrt{3}i$.
4) Soient D et E les points images de ces deux racines.
   On notera D et le point dont l'affixe a une partie réelle positive.

   a/ Construire D et E dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

   b/ Montrer que les points D et E sont respectivement sur les segments [AB] et [BC] et que AD=BE=CF

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
2) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]1,+\infty[$. $f'(x)=\frac{-x+2}{2x^2\sqrt{x-1}}$
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\ par\ g(x)=f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$
5) a/ Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$
   b/ Montrer que est dérivable à droite en 0.

Exercice n°8 :

Soit la fonction f définie sur $[0,\sqrt{6}[$ par $f(x)=\frac{2}{\sqrt{6-x^2}}$

1) a/ Montrer que f est dérivable sur $[0,\sqrt{6}[\ et\ que\ f(x)=\frac{2x}{\left(\sqrt{6-x^2}\right)^3}$

   b/ Montrer que f réalise une bijection de $[0,\sqrt{6}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   c/ Expliciter f^{-1} (fx) pour $x\in J$.
2) a/ Montrer que pour tout $x\in[0,\sqrt{3}]$; $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$

b/ Montrer que l'équation f(x)=x admet dans $[0, \sqrt{3}]$ une seule solution α

3) soit Un la suite définie sur IN par $U_0=0$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a/ Montrer que pour tout $n \in$ IN ; $U_n \in [0, \sqrt{3}]$

b/ Montrer que pour tout $n \in$ IN ; $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c/ Déduire que pour tout $n \in$ IN ; $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha$

d/ Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

4)Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$ par $g(x)=f(\sqrt{2}\tan x)$

Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$ dresser le tableau de variation de g.

Exercice n°9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit ζ le cercle trigonométrique de centre O et $\alpha \in [0,2\pi[$

On désigne par M le point d'affixe $e^{i\alpha}$ et par A le point d'affixe 1+i.

1) a/ Placer le point A.

   b/ A partir d'un point M, construire le point M' d'affixe $-2e^{-i\alpha}$.

2) a/ Montrer que $AM'=|2e^{i\alpha}+1-i|$

   b/ Montrer que $AM \times AM' = |2e^{i\alpha}-2-(1+3i)e^{i\alpha}|$

3) a/ Montrer que pour tout $\alpha \in [0,2\pi[$, $2i\, e^{i\alpha} \sin\alpha = e^{i2\alpha}-1$.

   b/ En déduire que $AM \times AM' = \sqrt{1+(-3+4\sin\alpha)^2}$

   c/ Déterminer alors la position du point M de ζ pour laquelle le réel AMxAM' est maximal.

Exercice n°10 :

Soit f la fonction définie sur [0,1[par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2) Montrer que f est strictement croissance sur [0,1[
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f(1-\sin x)$

   a/ Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x)

   b/ dresser le tableau de variation de g.

Exercice n°11 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A=1+2i$, $Z_B=1+\sqrt{3}+i$, $Z_C=1+\sqrt{3}-i$ et $Z_D=1-2i$.

1) a/ Montrer que $\frac{Z_D-Z_B}{Z_A-Z_B} = i\sqrt{3}$

   b/ Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle ζ.

   c/ Placer, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et D construire les points B et C.

   d/ Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

2) On considère dans C l'équation (E) : $Z^2-2(1+2\cos\theta)Z+5+4\cos\theta=0$, où θ est un réel de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

   a/ Résoudre l'équation (E)

   On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et Z_2 l'autre solution.

   b/ Montrer que les points M_1 et M_2 images respectives de Z_1 et Z_2 appartiennent à ζ

   c/ Montrer que $AM_1=2\sqrt{2-2sin\theta}$ et $M_1M_2=4\sin\theta$

   d/ Déterminer θ tel que les points A, B, C, D, M_1 et M_2 soient les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle ζ.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur [1, +∞[par $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

On désigne par Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Montrer que f est dérivable sur]1,+∞[et que pour tout x ∈]1,+∞[, $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right) & si\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ g(0) = 1 \end{cases}$

   a/ Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   b/ Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$et que pour tout x $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=\frac{-1}{1+\sin x}$

   c/ Montrer que pour tout x $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $-1 \le g'(x) \le -\frac{1}{2}$

   d/ Montrer que pour tout x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1-x \le g(x) \le 1-\frac{1}{2}x$