Exercice N°1 :

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
On donne les points $A(3,2,4);B(0,3,5);C(0,2,1)$ et $D(3,1,0)$

1/a) Montrer que ABCD est un parallélogramme
b) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD
c) Donner une équation du plan P contenant le parallélogramme ABCD

2/ Soit le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$
a) Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan P
b) Vérifier que E à pour cordonnées $(2,-2,5)$
c) Calculer le volume du pyramide ABCDE

Exercice n°2 :

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(3, 2, 6) , B(1, 2, 4) et C(4, -2, 5)

1 1) a - Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
0.5 b - En déduire que A, B et C définissent un plan P.
0.5 c - Vérifier que l'équation de ce plan est : 2x + y - 2z + 4 = 0.
0.5 2) a - Montrer que le triangle ABC est rectangle.
0.5 b - Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire à P.
0.5 c - Soit K le projeté orthogonal de O sur le plan P. Calculer la distance OK.
1 d - Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3) Soit I le point de l'espace définie par $3\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ et G le centre de gravité de ABC.
0.5 a - Montrer que I est le milieu du segment [OG].
0.5 b - Vérifier que d(I, P) = 2/3.

4) Soit S = { M de l'espace ξ vérifiant $\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$ = 5 }

1 a - Montrer que S est une sphère.

0.5 b - Etudier la position de S et du plan P.

Exercice N°3 :

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(1,1,0); B(0,-1,-3)$ et $C(1,2,1)$

1/a) Donner les composantes de vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

c) Déduire l'aire du triangle ABC

b) Vérifier qu'une équation du plan P formé par les points A,B et C est : $x+y-z-2=0$

2/Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à P

3/ Soit Q le plan parallèle à P et passant par le point D(-1,3,1)

a) Donner une équation cartésienne de Q

b) Déterminer les coordonnés du point I, point d'intersection de Q et Δ

4/Calculer la distance AI (appelée distance entre les plans P et Q)

Exercice N°4 :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} & ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \le U_n \le 4$

b) Montrer que U est strictement croissante

c) Déduire que U est convergente est calculer sa limite

2/a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \le 4 - U_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-U_n)$

b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \le 4 - U_n \le 4(\frac{1}{2})^n$

c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice n°5 :

Soit la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Calculer la limite de en $+\infty$.

b) Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .pour tout x € $[0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que la droite D : y = x+1 est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

e) Tracer C_f ainsi que la demi tangente à C_f au point O.

2) a) Monter que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Construire dans le même repère la courbe de f^{-1}.

3) a) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x =2.

b) Calculer l'aire B de la partie du plan limitée par $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations y =2, y=0
et la droite D : y = x.

Exercice N°6 :

Soit la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

1) Etudier les variations de f .

2) a)Montrer que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$.

b) On désigne par g la fonction réciproque de f , calculer g (1) , g ($\sqrt{2}$) et g(2) .

c) Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que : $g'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$