Exercice N°1

Soit f la fonction est définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x^2\sin(\frac{2}{x})}{1+x} & \text{si } x>0\end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$ on a : $\dfrac{-x^2}{1+x}\le f(x)\le\dfrac{x^2}{1+x}$

b) Déduire la limite de f à droite en 0

c) Montrer que f est continue en 0

2/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x})=2$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3/

a) Montrer que pour tout x de $\left]-\infty,0\right[$ on a : $f(x)\in\left]-\infty,0\right[$

b) Justifier que la fonction $x\mapsto fof(x)$ est bien définie sur $\left]-\infty,0\right[$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases}f(x)=-x^3+\sqrt{1-x}-2 & \text{si } x\le 1\\ f(x)=\dfrac{\cos(x-1)-1}{x-1}-3 & \text{si } x>1\end{cases}$

1)a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$

b) Etudier la continuité de f en 1 $\left(\text{On rappelle que } \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0\right)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3)a) Montrer que pour tout réel $x>1$, on a : $-3-\dfrac{2}{x-1}\le f(x)\le -3$

b)En deduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, interpréter le résultat .

4) Soit g la restriction de f sur $]-\infty,1]$

a)Montrer que g est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ en déduire $g(]-\infty,1])$

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α dans $]-\infty,1]$

c) Vérifier que $-0{,}9<\alpha<-0{,}8$.

d) En déduire le signe de g sur $]-\infty,1]$

EXERCICE N°3 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+x+1}-2x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

❶ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ Montrer que pour tout x ∈]-∞,0[, $\dfrac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$, déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸ Montrer que f est continue en 0.

❸a- Montrer que l'équation f(x) = 0, admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2},0\right[$.

b- En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$.

Exercice № 4:

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ x\geq 0 \\ \dfrac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & si\ x\prec 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0
2) a/ Montrer que pour tout réel positif x on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

   b/ En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$
3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et

   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(1-\sin x)$
4) a/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ une solution qu'on notera α

   b/ Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha-1}$

Exercice N 5 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}$$

1) a)Montrer que pour tout $n \in IN$; $0 \le u_n \le 4$

b)Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n)^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{4+3u_n} + u_n}$ puis montrer que (u_n) est croissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - 4| \le \frac{|u_n - 4|}{2}$$

En déduire que pour tout n de IN, $|u_n - 4| \le \dfrac{4}{2^n}$

b) Retrouver les résultats du 1°) c)

Exercice N° 6 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x - 1} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2+3} - 1 & si\ x \ge 1 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f sur un repère orthonormée $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1)a)Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ $\left(\text{On vous donne } \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{x - 1} = 0\right)$

b)En déduire que f continue en 1

c) Montrer que f est continue sur IR

2)a) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty; 1[$; $\dfrac{x+1}{x-1} \le f(x) \le 1$

b) En déduire que la droite d'équation y = 1 est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$

3)a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -1$, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a)Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

Exercice n°7 :

On donne ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions f, g et $g \circ f$
2. Déterminer $\lim_{2^+} f$, $\lim_{2^-} f$ $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$
3. Déterminer $\lim_{+\infty} g(x)$ et $\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x}$
4. Déterminer $\lim_{2^+} g \circ f$, $\lim_{0} g \circ f$ et $\lim_{+\infty} f \circ f$