Exercie1:

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$.

(On donnera les solutions sous forme exponentielle).

2/ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}\ z^3 - 18\ z^2 + 7i\sqrt{3}\ z + 3$.

a) Vérifier que $P(i\sqrt{3}) = 0$ et que $P(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$.

b) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z, $P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{1}{z^4} \cdot P(z)$.

c) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$.

a) Construire les points A ,B et C.

b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous la forme cartésienne.

c) La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E.

Déterminer l'affixe du point E.

Exercie2:

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan,

(C) est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5} + 2i$.

a) Montrer que le point Q appartient à (C).

b) Construire alors le point Q.

3) Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C).

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$.

c) En déduire que le quadrilatère OAQB est un losange.

d) Construire alors les points A et B.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(\sqrt{5}+2i)z+1+4\sqrt{5}\,i=0$.

a) Calculer $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

b) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

c) En déduire que les solutions de (E) sont :

$$a=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad b=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercie3:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a) Construire, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A et B.

b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2=1+2i\sqrt{6}$.

3) On considère le point D d'affixe c^2.

a) Montrer que $OD=5$.

b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$.

On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercie4:

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1),** $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C).

b) Placer A.

2/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i(1-\sqrt{2})\right] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i(1+\sqrt{2})\right]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2.

1) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe z, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$.

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(figure 2)**, on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\frac{-i\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercie 5 :

3) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.

a) Montrer que :

(K est le milieu du segment [M N]) si et seulement si ($z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$).

b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3 (On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2).

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.