Proposé par : Mr: Fehri Bechir
Série de révision avec correction : géométrique dans l'espace Bac Science

Exercice 1 : 2008 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

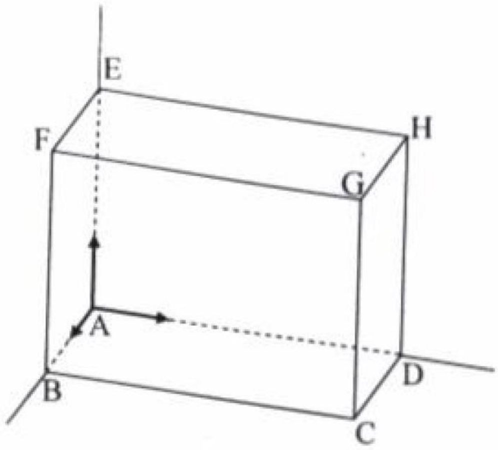
Montrer que $OH = \dfrac{4}{3}$.

3) Soit S la sphère de centre O et passant par A.

a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle $\mathscr{C}$ de centre H.

b) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 : 2009 pr



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit v le volume du tétraèdre MEBG.

a) Exprimer v en fonction de α.

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c) Pour quelles valeurs de α , v est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

Exercice 3 : 2010 pr

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(1,-1,1)$.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de $\mathscr{E}$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

b) Montrer que $S \cap \mathscr{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

b) Soit α un réel et soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(\alpha, 0, 2-\alpha)$.

Montrer que, lorsque α décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

Exercice 4 : 2014 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation $x+2y+z-6=0$.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2,0).

a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que MA = MB.

Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 6-3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 5 : 2015 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1/ a) Montrer que A, B et C déterminent un plan qu'on notera (P).

b) Justifier que (P) est d'équation $x+y+z-2=0$.

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (P).

2/ Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

b) En déduire que H est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point H.

Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

4/ Soit M un point de Δ.

a) Justifier que $MA=MB=MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point I de Δ tel que $IA=ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6 : 2016 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.
   Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.
2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.
   a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.
   b) Montrer que $P\cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon.
   c) Déterminer $Q\cap S$.
3) On donne les points $A(0, 0, 1)$,$B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.
   a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.
4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

Exercice 7 : 2017 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2,2,1)$, $B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$.
   b) On note P le plan (OBC).
   En remarquant que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\,\overrightarrow{OA}$, justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan P en O.
   c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.
2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :
   $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$.
   Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.
3) a) Calculer la distance OA.
   b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C).
4) On considère le point $H(1,-1,0)$.
   a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.

Exercice 8 : 2014 co

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$.

1) Montrer que (S) est la sphère de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) Soit Δ la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

   b) Montrer que l'intersection de Δ et (S) est vide.

3) Soit B le point de coordonnées (3, 0, 0).

   a) Justifier que le point B et la droite Δ déterminent un plan P.

   b) Montrer que P a pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$.

   c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

Exercice 9 : 2015 co

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1/ Justifier que (S) est de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.

2/ Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JM}=0$.

   a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x-2y-z+5=0$.

   b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.

   a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

   b) Montrer que $AJ=6$.

4/ Soit M un point du cercle (C).

   a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

   b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.

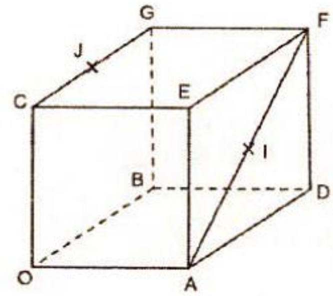
   c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

Exercice 10 : 2016 co

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].



1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les cordonnées de H, justifier que $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$.

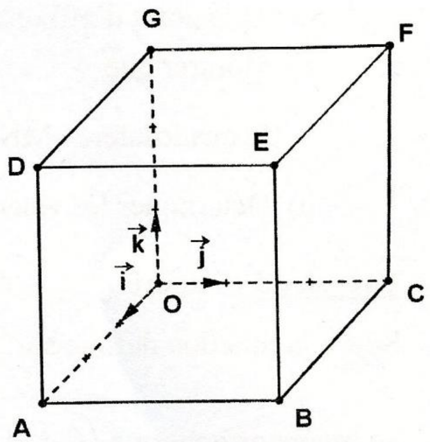
Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).

Exercice 11 : 2017 co

Exercice 1 **(5 points)**

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que A(3,0,0) ; C(0,3,0) et G(0,0,3).



1) a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω milieu de[CD] .

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}$.

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG .

3) On désigne par P le plan passant par les points A , E et G.

a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x - y + z - 3 = 0$.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace

tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 12 : 2018 pr

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1/ Soit le plan Q d'équation $x+y+\sqrt{2}\,z-2=0$.

Montrer que le plan Q coupe les axes $\left(O,\vec{i}\right)$, $\left(O,\vec{j}\right)$ et $\left(O,\vec{k}\right)$ respectivement aux points $A\left(2,0,0\right)$, $B\left(0,2,0\right)$ et $C\left(0,0,\sqrt{2}\right)$.

2/ Soit la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont tangents et déterminer leur point de contact.

3/ Soit a un réel strictement positif. On considère les points $M(a,0,0)$ et $N\left(0,\frac{4}{a},0\right)$.

Déterminer en fonction du réel a, les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}$.

4/ a) Montrer qu'une équation du plan $\left(CMN\right)$ est $4x+a^2y+2a\sqrt{2}\,z-4a=0$.

b) Soit d la distance du point O au plan $\left(CMN\right)$. Montrer que $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$.

c) En déduire la valeur du réel a pour laquelle la distance d est maximale.

5/ a) Montrer que pour tout réel $a>0$, le volume du tétraèdre OCMN est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) En déduire que pour tout réel $a>0$, l'aire du triangle CMN est supérieure ou égale à $2\sqrt{2}$.

c) Identifier les points M et N pour lesquels l'aire du triangle CMN est égale à $2\sqrt{2}$.

Correction

Corrigé d'exercice N°1 : 2008 pr

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \quad\Rightarrow\quad \vec{N}\begin{pmatrix}-8\\-4\\8\end{pmatrix}.$$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

c)On désigne par $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre OABC .

$$\mathscr{V}=\frac{1}{6}\left|\vec{N}\cdot\overrightarrow{AO}\right|=\frac{1}{6}\left|24+8-48\right|=\frac{16}{6}=\frac{8}{3} \text{ (unités de volume).}$$

Autrement:

$$\mathscr{V}=\frac{1}{6}\left|d\acute{e}t(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO})\right|$$

$$d\acute{e}t(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO})=\begin{vmatrix}-2&1&-3\\0&-4&-2\\-2&-1&-6\end{vmatrix}=-44+28=-16$$

2) $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\cdot\mathscr{B}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\mathscr{B}\cdot OH$ où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base ABC.

$$\mathscr{B}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vec{N}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{64+16+64}=6 \text{ (unités d'aire)}$$

$$OH=\frac{3\cdot\mathscr{V}}{\mathscr{B}}=\frac{3\cdot\frac{8}{3}}{6}=\frac{4}{3}$$

Autrement: $\vec{N} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P = (ABC).

$M \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0 \iff -8(x-3) - 4(y-2) + 8(z-6) = 0$

$\iff 2x + y - 2z + 4 = 0$

$OH = d(O,P) = \dfrac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{4}{3}$

3) a) $d(O,P) = \dfrac{4}{3}$ et $R = OA = \sqrt{9+4+36} = 7$.

$d(O,P) \prec R \Rightarrow S \cap P = (C)$ où (C) est le cercle de centre H.

b) Si r est le rayon du cercle (C) alors: $r = \sqrt{49 - \dfrac{16}{9}} = \sqrt{\dfrac{425}{9}} = \dfrac{\sqrt{425}}{3} = \dfrac{5\sqrt{17}}{3}$

Corrigé d'exercice N°2 : 2009 pr

A (0 , 0 , 0) ; B (2 , 0 , 0) ; D (0 , 4 , 0) ; E (0 , 0 , 3) .

1) a- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b- $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

c- $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal du plan (EBG),

donc une équation cartésienne du plan (EBG) est de la forme : 12x - 6y + 8z + d = 0

et comme E $\in$ (EBG) donc 24 + d = 0 signifie d = - 24.

Conclusion : Une équation du plan (EBG) est : 6x – 3y + 4z – 12 = 0.

2) a- Soit α un réel différent de 1 et M (2α , 4α , 3α) .

$\overrightarrow{AM} = 2\alpha\vec{i} + 4\alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = \alpha\overrightarrow{AG}$ et $\alpha \neq 1$ donc $M \in (AG)$ et $M \neq G$.

b- On a : $12\alpha - 12\alpha + 12\alpha - 12 = 12(\alpha - 1) \neq 0$ car $\alpha \neq 1$ donc M n'appartient pas au plan (EBG).

Autrement : $A \notin (EBG)$ donc $(AG) \not\subset (EBG)$ de plus $(AG) \cap (EBG) = \{G\}$ et comme M décrit la droite (AG) privé du point G donc $M \notin (EBG)$

3) a- $\mathcal{V}$ = le volume du tétraèdre MEBG .

$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EM}\right|$ or $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 3\alpha - 3 \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left| 24\alpha - 24\alpha + 24(\alpha - 1)\right| = 4\left|\alpha - 1\right|$.

b- Le volume du tétraèdre AEBG est égal au volume du tétraèdre MEBG pour M = A

c'est à dire pour, donc il est égal à 4.

c- Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal à $2 \times 4 \times 3 = 24$

$\mathcal{V}$ est égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH signifie $4\left|\alpha - 1\right| = 24$

signifie $\left|\alpha - 1\right| = 6$ signifie $\alpha = 7$ ou $\alpha = -5$.

Corrigé d'exercice N°3 : 2010 pr

1°) a°) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan $(\mathscr{P})$.

1°) b°) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $(ABC) = (\mathscr{P})$, d'où :
$(\mathscr{P}) : x + y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$.
L'écriture $A(1,0,0) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$ permet alors de conclure :
$(\mathscr{P}) : x + y + z - 1 = 0$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative 2 acceptable : Vérifications $A \in (\mathscr{P})$, $B \in (\mathscr{P})$ et $C \in (\mathscr{P})$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative 3 acceptable : Coplanarité de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \ldots$.

2°) a°) On a la réduction :

$(\mathscr{S}): x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0 \iff (\mathscr{S}):(x-1)^2-1+y^2+(z-1)^2-1+1=0$

$\iff (\mathscr{S}):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$

On en déduit que l'ensemble $(\mathscr{S})$ est une sphère de centre $I(1,0,1)$ et de rayon $R=1$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative acceptable : Formule $h=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$ ... .

2°) b°) Il suffit de montrer que les trois points A , B et C appartiennent à la sphère $(\mathscr{S})$.

On a $(1-1)^2+0^2+(0-1)^2=1$, d'où $A\in(\mathscr{S})$.

On a $(0-1)^2+0^2+(1-1)^2=1$, d'où $B\in(\mathscr{S})$.

On a $(1-1)^2+(-1)^2+(1-1)^2=1$, d'où $C\in(\mathscr{S})$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative acceptable :

Calcul de distances … puis le reste … : $d=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $d<r$, $H\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, $AH=BH=CH$, …. .

3°) a°) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ étant précédemment déterminé, on utilise la formule :

$\mathscr{V}(IABC)=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|$.

Le calcul $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ainsi que le calcul du produit scalaire donne $\mathscr{V}(IABC)=\dfrac{1}{6}$ (uv)

3°) b°) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\alpha-1\\0\\2-\alpha\end{pmatrix}$ et

$$\mathscr{V}(MABC)=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|=\frac{1}{6}\left|(\alpha-1).1+0.1+(2-\alpha).1\right|=\frac{1}{6}$$ indépendant de α

$\boxed{\text{Note}}$: La valeur de cette constante n'est pas exigée , en effet :

Méthode alternative 2 acceptable : parallélisme donc hauteur constante donc volume constant .

Corrigé d'exercice N°4 : 2014 pr

1) a) $M(x,y,z)\in S \iff x^2+y^2+z^2=8$ donc S est une sphère de centre O et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

b) $d(O,P)=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<2\sqrt{2}$ donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$ et de centre I le projeté orthogonal de O sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc $D:\begin{cases}x=t\\y=2t, t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

$$I(x,y,z)\in D\cap P \iff \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\\x+2y+z-6=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\\6t-6=0\end{cases} \iff \begin{cases}t=1\\x=1\\y=2\\z=1\end{cases}$$, il en résulte que $I(1,2,1)$.

2) a) $\begin{cases} 2^2+0^2+2^2-8=0 \\ 2+0+2-6=-2\neq 0 \end{cases}$ donc $A\in S$ et $A\notin P$.

$\begin{cases} 2^2+2^2+0^2-8=0 \\ 2+4+0-6=0 \end{cases}$ donc $B\in S$ et $B\in P$ donc B appartient à ($\mathscr{C}$).

b) $M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2 \Leftrightarrow y=z.$

c) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite $\Delta:\begin{cases} x+2y+z-6=0 \\ y=z \end{cases}$, on pose

$y=\alpha\in\mathbb{R}$, on aura $\Delta:\begin{cases} x=-3\alpha+6 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases},\alpha\in\mathbb{R}.$

3) ABC est équilatéral si et seulement si $CA=CB=AB$.
$CA=CB$ donc C est un point de Q et C appartient à ($\mathscr{C}$) qui est contenu dans P donc C est un point de Δ, il en résulte qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $C(-3\alpha+6,\alpha,\alpha)$.

Ainsi pour que ABC soit équilatéral , il suffit que $CA=AB \Leftrightarrow CA^2=AB^2 \Leftrightarrow$

$(4-3\alpha)^2+\alpha^2+(\alpha-2)^2=8 \Leftrightarrow \alpha=2$ ou $\alpha=\frac{6}{11}$. soit $C(0,2,2)$.

Corrigé d'exercice N°5 : 2015 pr

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. donc les points A, B et C ne sont pas alignés par suite ils déterminent un plan.

b) $1+1+0-2=0$ donc $A\in(P)$.

$1-1+2-2=0$ donc $B\in(P)$.

$0+1+1-2=0$ donc $C\in(P)$.

Il en résulte que $x+y+z-2=0$ est une équation de (P).

c) $1+1+4-2=2\neq 0$ donc $D\notin(P)$.

2/ a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=1-1=0$ donc $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CA}$ par suite le triangle ABC est rectangle en C.

b) le triangle ABC est rectangle en C et $H=A*B$ donc c'est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un normal à (P) donc il est directeur de Δ de plus le point $H=A*B$ donc $H(1,0,1)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$.

4/ a) Le point H est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC et Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et puisque M est un point de Δ donc $MA = MB = MC$.
Ou bien : $M \in \Delta$ donc $M(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$.

$$\begin{cases} MA^2 = \alpha^2 + (\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2 \\ MB^2 = \alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2 \\ MC^2 = (\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2 + \alpha^2 \end{cases} \text{ donc } MA = MB = MC.$$

b) $I \in \Delta$ donc $I(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$ $IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2 = (\alpha-3)^2 \Leftrightarrow \alpha = 1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2,2,2)$ de Δ tel que $IA = ID$.

c) Le point $I \in \Delta$, d'après a) et b), $IA = IB = IC = ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA = \sqrt{5}$.

Corrigé d'exercice N°6 : 2016 pr

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5 \neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$. Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

b) $d(I,P) = \sqrt{3} < R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$ et puisque $J \in P$ et $\vec{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q) = 3\sqrt{3} > R$, on en déduit que $S \cap Q = \varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM} = 2x + 2y - 2z + 2 = 2(x+y-z+1)$.

4) $$\begin{cases} M \in S \\ V_{(ABCM)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6}\left|2(x+y-z+1)\right| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ x+y-z-5 = 0 \text{ ou } x+y-z+7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (S \cap P) \cup (S \cap Q) \Leftrightarrow M \in S \cap P = \mathscr{C}.$$

Corrigé d'exercice N°7 : 2017 pr

De quoi s'agit -il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relatives d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère**
- **Droite tangente à un cercle**

1°) a) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$,

Donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 2\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$.

b) $O\in P\cap(OA)$ ①

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de P, or $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{OA}\perp P$ ②

d'après ① et ② ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

c) On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ ainsi,

$$d\left(O,(BC)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\sqrt{8^2+8^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2+8^2}}=\sqrt{2}.$$

2) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$ signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2+2^2+2^2+1^2$

signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=11>0$

Donc (S) est la sphère de centre $A(2,2,1)$ et de rayon R = $\sqrt{11}$.

3) **a)** $OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

b) D'après la question **1-b)**, O est le projeté orthogonal de A sur le plan P, donc $d(A,P) = OA = 3 < \mathrm{R} = \sqrt{11}$.

Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\sqrt{11}^2 - 3^2} = \sqrt{11-9} = \sqrt{2}$.

c) $(BC) \subset P$; $\mathcal{C} \subset P$ et $d(O,(BC)) = \sqrt{2}$ donc (BC) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

4) **a)** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BH}$,

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ainsi $H \in (BC)$ $(\star)$.

$OH = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} = r$ $(\star\star)$.

D'apres $(\star)$ et $(\star\star)$, on conclut que $(BC) \cap \mathcal{C} = \{H\}$.

Corrigé d'exercice N°8 : 2014 cor

1) $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$ donc (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$

b) $M(x,y,z) \in (S) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ t^2 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$ or l'équation

$t^2 - 2t + 4 = 0$ n'a pas de solution car $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 > 0$ donc $\Delta \cap (S) = \varnothing$.

3) a) $B \notin \Delta$ donc B et Δ déterminent un plan P.

b) $0 + 0 + 3 - 3 = 0$ donc le point A appartient au plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

$3 + 0 + 0 - 3 = 0$ donc le point B appartient au plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

Soit $C(1,-1,3)$ un point de Δ différent de A et $1 - 1 + 3 - 3 = 0$ donc le point C appartient au plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$ et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P à pour équation $x + y + z - 3 = 0$.

c) $d(I,P)=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ donc P et S sont tangent en H, projeté orthogonal de I sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc $D:\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=\alpha-1,\alpha\in\mathbb{R}\\ z=\alpha\end{cases}$

$$H(x,y,z)\in D\cap P\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=\alpha-1\\ z=\alpha\\ x+y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=\alpha-1\\ z=\alpha\\ 3\alpha-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ x=2\\ y=0\\ z=1\end{cases}$$, il en résulte que $H(2,0,1)$.

Corrigé d'exercice N°9 : 2015 cor

1/ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25.$ Il en résulte que (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $R=5$.

2/ a) $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$. $M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0\Leftrightarrow 2x-2y--z+5=0.$ Il en résulte que (P) est le plan d'équation $2x-2y--z+5=0.$

b) $d(I,P)=\dfrac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}}=3<5$ donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$ et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or $J\in(P)$ et $\overrightarrow{JI}$ est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{JI}$ par suite les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires, d'où $A\in(IJ)$.

b) $AJ=\sqrt{16+16+4}=6.$

4/ a) On sait que $\begin{cases}A\in(IJ)\\ (IJ)\perp(P)\text{ en }J\\ M\in(C)\subset(P)\end{cases}$. il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b) $AM=\sqrt{AJ^2+JM^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}.$

c) Pour tout M du cercle (C), AM = $2\sqrt{13}$ donc $M\in(S')$, il en résulte que $(C)\subset(S')$ et puisque $(C)\subset(P)$, on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

Corrigé d'exercice N°10 : 2016 cor

Exercice 1

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

2) a) $A_{OIJ}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right\|=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

b) $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $V_{OIJ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OE}\right|=\frac{1}{8}$.

c) La distance EH est la langueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ}=\frac{1}{3}\times A_{OIJ}\times EH$ donc $EH=\frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que $d(E,(OIJ))=EH=\frac{\sqrt{21}}{7}=R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.

Corrigé d'exercice N°11 : 2017 cor

De quoi s'agit -il ?

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

1°) a) ⇨ $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG}=3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Ainsi $E(3,3,3)$.

⇨ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=3\vec{i}+3\vec{k}$. Ainsi $D(3,0,3)$.

b) ⇨ $\Omega=C*D$ signifie $\Omega\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right)$ donc $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

2) a) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$.

b) $V_{(OAEG)}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\right).\overrightarrow{AO}\right|$ avec $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{6}\left|-27+0+0\right|=\dfrac{27}{6}=\dfrac{9}{2}$.

3) a) $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD)

Donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi $P\perp(CD)$.

b) Soit $P' : x - y - z - 3 = 0$

⇨ $3 - 0 + 0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$.
⇨ $3 - 3 + 3 - 3 = 0$ donc $E \in P'$.
⇨ $0 - 0 + 3 - 3 = 0$ donc $G \in P'$.

Or $(AEG) = P = P'$, ainsi $P : x - y + z - 3 = 0$.

Autrement : $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc $P : 9x - 9y + 9z + d = 0$,

Or $A(3,0,3) \in P$ signifie $9\times3-9\times0+\times0+d=0$ signifie $d=-27$
Donc $P : 9x - 9y + 9z - 27 = 0$ signifie $P : x - y + z - 3 = 0$.

4) a) $(S):x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

signifie $(S):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=-6+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

signifie $(S):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\Omega\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, $P : x - y + z - 3 = 0$ donc $d(\Omega,P)=\dfrac{\left|\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$d(\Omega,P)=R$. Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de Ω sur P.

Signifie $\begin{cases} H \in P \\ H \in D\left(\Omega, \overrightarrow{n_p}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$ signifie $\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} + \alpha \\ y = \dfrac{3}{2} - \alpha \\ z = \dfrac{3}{2} + \alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

signifie $\begin{cases} \dfrac{3}{2} + \alpha - \dfrac{3}{2} + \alpha + \dfrac{3}{2} + \alpha - 3 = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} + \alpha \\ y = \dfrac{3}{2} - \alpha \\ z = \dfrac{3}{2} + \alpha \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ Ainsi $H(2,1,2)$