Exercice1 :

Etudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-8x+6}-x\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+1}-x\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)$

Exercice2 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x\le 0\\ f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0\end{cases}$.

1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Vérifier que pour tout x ∈[0, +∞[, $\dfrac{-2}{\sqrt{x}}\le f(x)\le 0$;

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Montrer que f est continue en 0.

Exercice3 :

1. Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=3x+2\sin x$

a. Vérifier que pour tout réel x, $3x-2\le g(x)\le 3x+2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2. Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{g(x)} & \text{si } x>0\\ x^3-3x+\dfrac{1}{5} & \text{si } x\le 0\end{cases}$.

a. Montrer que f est continue en 0.

b. Vérifier que pour tout $x>\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{x}{3x+2}\le f(x)\le\dfrac{x}{3x-2}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]-2,-1[$.

Exercice4:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{4x^2+1} & \text{si } x\ge 0\\ a+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x<0\end{cases}$, a ∈ IR.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2.a. Montrer que pour tout x ∈]-∞, 0[, $a-x^2\le f(x)\le a+x^2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

c. Déterminer le réel a pour que f soit continue en 0.

Exercice5 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}-x & \text{si } x\le 0\\ 2+x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x>0\end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur chacun des intervalles]-∞,0[et]0, +∞[;

2. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{3}{2}$ admet au moins une solution dans]1, 2[.

3.a. Montrer que pour tout $x>0$, $2-x^2\le f(x)\le 2+x^2$.

b. Montre que f est continue en 0.

4. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-2}{x}$.

Exercice6 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+\sin x}{x-1} & \text{si } x\le 0 \\ x\sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$.

1.a. Montrer que f est continue en 0.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$.

2.a. Montrer que pour tout $x\in]-\infty, 0]$, $|f(x)-3|\le \frac{4}{1-x}$.

b. Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

4. Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=\sqrt{x^2+3}-x-1$.

a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur IR puis déterminer $g(\mathbb{R})$.

Exercice7 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & \text{si } x\ge 0 \\ \dfrac{x^2}{4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & \text{si } x<0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0.

2.a. Montrer que pour tout $x\ge 0$, $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2}\le f(x)\le \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(1-\sin x)$.

4.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

b. Montrer que $\tan\alpha=-\sqrt{\alpha}-1$.

Exercice8 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{\pi(1+x)} & \text{si } x>-1 \\ \sqrt{x^2+x} & \text{si } x\le -1 \end{cases}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x)$.

2.a. Montrer que pour tout $x>-1$, $0\le f(x)\le \frac{2}{\pi(1+x)}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$.

3. Montrer que f est continue sur IR.

4. Montrer que l'équation $f(x)=2x$ admet au moins une solution α dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)}{x+1}$.