Exercice1 :

Etudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x-2}{4x}\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$

Exercice2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}3x+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in\left]-\infty,\,-1\right]\\ x^2+3x+1 & \text{si } x\in\left]-1,\,0\right]\\ 1+2\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right) & \text{si } x\in\left]0,\,+\infty\right[\end{cases}$

1. Etudier la continuité de f en 0 et en -1.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]$.

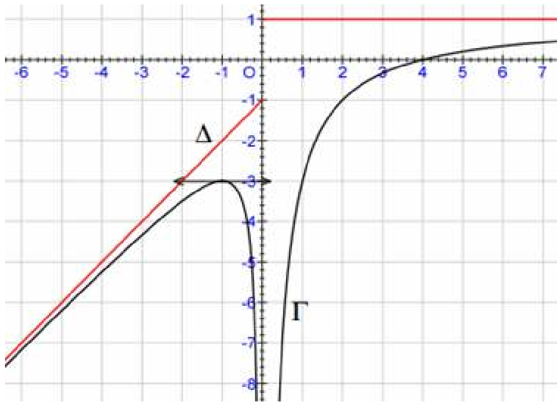
3. Vérifier que pour tout réel x de $\left]0,+\infty\right[$, on a : $1\le f(x)\le 1+\dfrac{4}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$

5. Montrer que l'équation f(x) $=-4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]-2,-1\right[$.

Exercice3 :

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur IR*. On sait que la droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$. Γ admet deux autres asymptotes les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$.



1. Par une lecture graphique

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Résoudre les équations $f(x)=-1$et $f(x)=-3$

d. Déterminer $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)$, $f\left(\left]-\infty,0\right[\right)$ et $f\left(\left]0,4\right]\right)$).

2. On désigne par g la fonction définie sur IR \{-3} par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+3}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to(-3)^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^+} g(x)$.

3. Soit h la fonction définie par : $h(x)=g\circ f(x)$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)} h(x)$.

b. Prouver que h est prolongeable par continuité en 0.

Exercice4 :

Soit la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x<1\\ f(x)=\sqrt{x^2+x-2}-x & \text{si } x\ge1\end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Montrer que pour tout $x\in]-\infty,1[$, $\dfrac{x+1}{x-1}\le f(x)\le 1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Etudier la continuité de la fonction f en 1.

4.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-\frac{1}{2},0[$ au moins une solution α.

b. Justifier que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$.

5. Soit g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice5 :

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) \text{ si } x \in \left]-\infty, 1\right] \setminus \{0\} \\ f(x) = \sqrt{x^2+8} - x - 1 \text{ si } x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases}$

1.a. Vérifier que pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right] \setminus \{0\}$, $|f(x)| \leq |x|$.

b. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

2. Etudier la continuité de f en 1.

3.a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f\left(\dfrac{-2}{x-1}\right)$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution α dans $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right) = \dfrac{1}{2\alpha}$.

<u>Exercice6 :</u>

I- Soit la fonction f définie sur]0, +∞[par : $f(x) = \dfrac{x^3\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)}{x+1}$.

1.a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2x^2}{x+1}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{x}{2}$ admet dans $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ au moins une solution α.

II- Soit g la fonction définie sur zIR^* par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

3. Soit la fonction h définie sur]-∞, 1] par : $\begin{cases} h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1 \\ h(1) = m \end{cases}$, $m \in IR$.

Déterminer m pour que h soit continue sur]-∞, 1].

<u>Exercice7 :</u>

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } < 0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1.a. Montrer que f est continue sur chacun des intervalles]-∞, 0[et]0, +∞[.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Vérifier que pour tout x ∈]-∞, 0[, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

d. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2. Le tableau de variation ci-dessous donne les variations d'une fonction g définie et continue sur IR.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

a. Déterminer $g\left(\left[1, +\infty\right[\right)$ et $g\left(\left]-\infty, 2\right[\right)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ g(x)$.

c. Montrer que $f \circ g$ est continue sur $\left]-\infty, 2\right[$.

d. Montrer que $f \circ g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.