Exercice1:

Soit z un nombre complexe.

Montrer que : $1+z+z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$.

Exercice2:

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1-i$, -2 et $2+2i$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle.
3. Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.
4. Déterminer et construire les ensembles $E_1=\left\{M(z)\in P\ /\ \frac{z-1+i}{z-2-2i}\in\mathbb{R}\right\}$ et $E_2=\left\{M(z)\in P\ /\ |z-1+i|=|\bar{z}+1+3i|\right\}$

Exercice3:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(-i)$.

A tout point M d'affixe $z\neq -i$, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1-z}{1-iz}$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'|=1$.

2. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $z'+i=\frac{-1+i}{z+i}$.

3.a. Montrer que pour tout point M distinct de B, $BM\times BM'=\sqrt{2}$.

b. En déduire que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1 alors M' appartient au cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice4:

On considère les nombres complexes $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}-i$ et $Z=z_1.z_2$.

1. Ecrire les nombres complexes z_1, z_2 et Z sous forme exponentielle.
2. Donner l'écriture cartésienne de Z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice5 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2.

A tout point M du plan d'affixe z ($z\neq 2$), on associe le point d'affixe z' telle que $z'=\frac{z-i}{iz-2i}$.

1.a. Montrer que $|z'|=\frac{AM}{BM}$.

b. En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB], le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

2. On suppose que $z\neq i$ et $z\neq 2$.

a. Montrer que $(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM'}})\equiv(\overrightarrow{BM},\widehat{\overrightarrow{AM}})-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b. En déduire que si M appartient à la droite (AB), le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

Exercice6:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B d'affixes respectives $z_A=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1. Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes z_A et z_B.

2. On désigne par M le point d'affixe $z_M=z_A+z_B$.

a. Montrer que le quadrilatère OAMB est un carré.

b. Donner l'écriture trigonométrique de z_M.

c. Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice7:

1. Soit $\theta\in[0, 2\pi[$.

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexe $(1+i)e^{i\theta}$ et $(1-i)e^{i\theta}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}, 2e^{i\theta}$, $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ et $z_2=\sqrt{2}\,e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$.

a. Montrer que le point A est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b. Calculer $\frac{z_1}{z_2}$ et déduire que le quadrilatère OM_1BM_2 est un carré.

Exercice8:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1-i$, $z_B = 2+\sqrt{3}+i$ et $z_C = 2$.

Soit Γ le cercle de centre C et de rayon 2.

1.a. Vérifier que $B \in \Gamma$.

b. Placer les points A et C. Construire alors le point B.

2.a. Ecrire z_A sous forme exponentielle.

b. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique, en déduire que $\frac{z_B}{z_A} = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c. En déduire la forme exponentielle de z_B.

d. Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que $|z| = |\overline{z}-1-i|$.

4. A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que z' soit réel.

b. Montrer que pour tout point M distinct de C, $OM' = 3\frac{AM}{CM}$.

c. En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de [AC], le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

Exercice9 :

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = 1-i$ et $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

a. Ecrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.

b. Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

c. Déterminer l'affixe du point D pour que OADB soit un carré.

2. A tout point M d'affixe z ($z \neq 1+i$), on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z-2}{z-1-i}$.

a. Vérifier que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{z-2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{z-1-i}\right)$.

b. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

Exercice10:

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_C = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

a. Construire les points A et C.

b. Vérifier que $\frac{z_C}{z_A} = i$, en déduire la nature du triangle OAC.

c. Ecrire $(1-i)$ sous forme exponentielle puis déduire que $(1-i)z_A = z_B$.

d. Montrer que OBAC est un parallélogramme puis construire le point B.

2.a. Ecrire z_B sous forme cartésienne.

b. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Construire le cercle Γ de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$. La perpendiculaire à (OB) passant par O coupe le cercle (C) en un point D d'affixe z_D dont la partie imaginaire est positive.

a. Justifier que $z_D = iz_B$.

b. Montrer que OADC est un carré.

Exercice11 :

Montrer que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$.