2012 C

LOGARITHME BAC TECH

EXERCICE(BAC TECH 2013 c)

Soit la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2\ln(x) & \text{si } x \in]0\ ,\ +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Déterminer la nature de la branche infinie de (C).

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = -4x\ln(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe $(O,\vec{i})$.

5) Construire (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On précisera en particulier la tangente à (C) au point O.

6) Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda < \sqrt{e}$.

a) En utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2\ln(x)\,dx = \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e}$

b) Soit $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \sqrt{e}$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$.

Exercice 3 (6 points)

1) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$. On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x\in]0,+\infty[$; $g'(x)=\frac{1+x}{x^2}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

b) Tracer (T) et (C) .

3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-1+(x-1)\ln x$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,+\infty[$ exactement deux solutions notées α et β. (On prendra $\alpha<\beta$)

b) Justifier que $0,2<\alpha<0,3$ et que $2,2<\beta<2,3$.

4) Soit (E) la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations, $x=\alpha$ et $x=\beta$. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de (E).

a) Hachurer (E).

b) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$; $f'(x)=g(x)$.

c) Montrer que $\mathscr{A} = \int_1^{\alpha} g(x)dx + \int_1^{\beta} g(x)dx$

d) En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.