Exercice N°1:

On considère la suite (U_n) définie sur par : $U_0=2$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{2U_n}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_n >1$.
   b) Montrer que (U_n) est une suite décroissante.
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.
2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{2U_n-2}{2U_n-1}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
   b) Exprimer V_n en fonction de n . En déduire U_n en fonction de n.
   c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice N°2

Partie A : choisir la bonne réponse :

1) (U_n) est une suite réelle vérifiant pour tout n$\in$ IN *: $-1-\frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$
   a. $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ b. $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1$ c. (U_n) est bornée
2) soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_n = \frac{n+(-1)^n}{n-2}$ alors on a
   a. $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ b. $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$ c. (U_n) n'a pas de limite
3) Pour tout n $\in$ IN on pose $S_n= \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^n$ alors on a :
   a. $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ b. $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ c. $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Partie B : Répondre par vrai ou faux :

1) Si (U_n) est une suite croissante alors elle est convergente
2) Si (Un) est une suite non minorée alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
3) Si(U_n) une suite qui admet une limite en + ∞ alors elle est convergente.

Exercice N°3

Soit la suite U_n pour n$\in$ IN définie par : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 5 \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2 en fonction de a.
2) On pose $W_n= U_n - a$
   a) Trouver le réel a pour que soit une suite géométrique. Pour la suite de l'exercice, on prendra cette valeur.
   b) Déterminer W_n puis U_n en fonction de n .
3) Etudier la convergence de chacune des suites W_n et U_n .

Exercice N°4

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3$

1) Calculer (U_1) et (U_2) ; U est-elle géométrique ? Est-elle arithmétique ?
2) Montrer que pour tout n $\in$ IN : $2 \leq U_n \leq 5$
3) a) Montrer que (U_n) est une suite croissante .
   b) En déduire alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
4) On pose pour tout n $\in$ IN par $V_n = U_n - 5$.
   Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
5) a) Exprimer (V_n) et (U_n) en fonction de n.
   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$ puis retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice N°5

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+4}{U_n+5} \end{cases}$

1) Calculer (U_1) et (U_2) ; U est-elle géométrique ? Est-elle arithmétique ?

2) Montrer que pour tout $n \in$ IN : $-4 \leq U_n \leq 1$

3)a) Montrer que (U_n) est une suite croissante

b) En déduire alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

On pose pour tout $n \in$ IN par $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+4}$

4) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

5)a) Exprimer (V_n) et (U_n) en fonction de n.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$ puis retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice N°6

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} T_0 = 9 \\ T_{n+1} = \frac{8T_n-6}{T_n+1} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in$ IN : $T_n \geq 6$

2)a) Montrer que $T_{n+1} - T_n = \frac{(T_n-1)(6-T_n)}{T_n+1}$

b) En déduire (T_n) est une suite décroissante

c) En déduire alors que (T_n) est convergente.

3) Montrer que pour tout $n \in$ IN $|T_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|T_n - 6|$.

4) En déduire $|T_n - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$

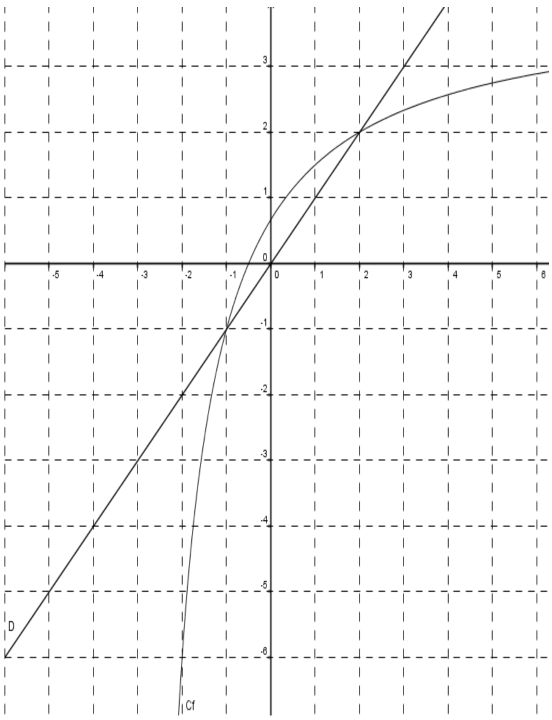
5) En déduire $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice N°7

On considère la suite U_n pour $n \in$ IN définie par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{2+4U_n}{3+U_n} \end{cases}$ et dans le graphique,

on donne la courbe représentative C_f de la fonction $f(x) = \frac{2+4x}{3+x}$

pour $x \in]-1, +\infty[$ et la droite D d'équation $y = x$.



1) a) Déterminer graphiquement les abscisses α et β ; $(\alpha < \beta)$ des points d'intersection de la courbe C_f et la droite D.

b) Placer sur l'axe des abscisses sans faire de calcule les termes U_0, U_1, U_2

2) a) Montrer que pour tout n, $U_n > 2$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite l

3) Soit (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = \frac{U_n-2}{1+U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

b) Exprimer V_n puis un en fonction de n .

c) Calculer la limite de la suite (V_n), puis retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice N°8

On considère les suites définie pour tout $n \in IN^*$, par $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{1+n}{3n} U_n \end{cases}$ et $V_n = \frac{U_n}{n}$

1) Montrer que V_n est une suite géométrique.
2) Exprimer V_n en fonction de n .
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4) Soit la $S_n = \sum_1^n V_k$.
Calculer S_n en fonction de n et montrer que la suite S_n est convergente.

Exercice N°9

On considère la suite (U_n) pour $n \in IN$ définie par; $U_0=1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2$.

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$; $U_n \geq 0$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$; $U_n \geq n-3$. .
   c) En déduire la limite de la suite(U_n) $n \in IN$.
3) On définit la suite V_n pour tout $n \in IN$: $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$.
   a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que : pour tout $U_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} 3n - \frac{21}{4}$.
   c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par :$S_n = \sum_0^n U_k$.
   Déterminer l'expression de Sn en fonction de n .

Exercice N°10

On considère la suite (U_n) définie sur par : $U_0=2\sqrt{5}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n^2+5}{2U_n}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_n > \sqrt{5}$.
2) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = \frac{-U_n^2+5}{2U_n}$ et en déduire que U_n une suite décroissante.
3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.