EXERCICE N°1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=(x^3-1)\sqrt{x^2+1}$

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2°)Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et en déduire que le signe de f'(x) et le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.

3°)Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$, étudier les variations de Q sur R et démontrer que l'équation Q(x) = 0 admet une unique solution α sur R dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

4°)En déduire le signe de Q(x) puis le signe de f'(x).

5°)Dresser le tableau de variation de f sur R.

6°) Tracer la courbe (ζf) de la fonction f .

EXERCICE N°2

Partie A

Soit P la fonction polynôme définie sur R par : $P(x) = x^3 - 3x + 4$.

1°) Etudier les variations de P.

2°) Démontrer que l'équation P(x) = 0 admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3°) En déduire le signe de P(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R^* par : $f(x)=x+2+\dfrac{3x-2}{x^2}$ *et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. (unité 1 cm)*

1°) Démontrer que la courbe C_f admet deux asymptotes que l'on précisera.
Préciser la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

2°) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{P(x)}{x^3}$ *et en déduire le sens de variation de f.*

3°) Déterminer le ou les points où la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

4°) Tracer la courbe C_f , la droite Δ et les autres renseignements obtenus sur C_f ,.

EXERCICE N°3

Partie I.

Soit la fonction f définie sur $R-\{2\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ *où a , b et c sont des réels.*

On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer les réels a , b et c pour que:

- *La courbe (ζf) passe par le point A(0,-1)*
- *La fonction f admet un extremum en 0*
- *La courbe (ζf) admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur (-3)*

Partie II.

On donne a = 1 , b = -1 et c = 2.

1°)Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2°)Préciser les extremum de f .

3°)En utilisant les variations de f comparer les nombres : $A=\dfrac{2008\times 2007+2}{2006}$ *et* $B=\dfrac{2009\times 2008+2}{2007}$

EXERCICE N°4

Soit f une fonction vérifiant

1. *f définie et continue sur R*
2. $\lim\limits_{+\infty} f = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$
5. Pour tout $x\in\left]-\infty,1\right]$: $f(x)>x$
6. Pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$: $f'(x)>0$
7. Pour tout $x\in\left]1,+\infty\right[$: $f'(x)<0$
8. $f(1)=3$

*1°)Interpréter géométriquement les points: **2** , **3** , et **4** .*
2°)Dresser le tableau de variations de f .
3°)Tracer l'allure de (ζf) où (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

EXERCICE N°5

Partie A

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^4 - 4x - 3$
1°) Etudier les variations de g.
2°) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions α et β sur R telles que : $\alpha < 0 < \beta$.
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β.
c) Déterminer le signe de g(x) en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $R\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$
1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout $x\neq1$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$
b) En déduire que la courbe C_f représentative de f admet une asymptote oblique que l'on indiquera.
c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation y = x.
3°) a) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{x^2g(x)}{(x^3-1)^2}$
b) En déduire les variations de f.
4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.
5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.
6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $\left[2,+\infty\right[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x^2-4}$. On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1°)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ et interpréter géométriquement le résultat.
b)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
c)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$. Interpréter géométriquement le résultat.
2°)Montrer que f est dérivable sur $\left]2,+\infty\right[$ et calculer f '(x) pour tout $x\in\left]2,+\infty\right[$.
3°) Tracer la courbe (ζf) de la fonction f .
4°)Montrer que f est une bijection de $\left[2,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.
5°)a)Sur quelle intervalle K , f^{-1} est continue
b)Etudier les variations de f^{-1}
6°)Construire la courbe (ζf^{-1}) de la fonction f^{-1} dans le même repère.
7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\dfrac{x}{8}+1$

Partie A

1°)Montrer que f' est définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3-8}{8\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}$

2°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.

3°) Soit (C) la courbe représentative de f.

a) Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation : $y = \frac{x}{8} + 1$.

Préciser la position relative de (C) et de (D).

b) Construire (C) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$*, unité graphique : 4 cm.*

4°) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan délimité par (C), (D) et les droites d'équation x = 1 et x = 2.

Parie B

1°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ *par :* $g(x) = f(x) - x$.

Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α *et que* $\alpha \in [1 ; 2]$.

2°) Démontrer que, pour tout $x \in [1 ; 2]$*, on a :* $|f'(x)| \leq \frac{1}{10}$

3°) Soit (u_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout } n \in N \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout $x \in [1 ; 2]$*,on a :* $f(x) \in [1 ; 2]$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in N$, $1 \leq u_n \leq 2$.

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|u_n - \alpha|$

d)En déduire que pour tout n de N : $|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{10^n}$. *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d) Déterminer une valeur approchée de α *à* 10^{-3} *près.*

EXERCICE N°8

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par :* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1°)Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et calculer f'(x) .*

2°)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.

3°)Dresser le tableau de variation de f .

4°)Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

5°)Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \frac{1 + x^2}{2x}$

6°)On désigne par C et C' les courbe respectives de f et f^{-1} *dans même repère orthonormé .*

montrer que la droite D : y = 2x est une asymptote oblique à C.

7°)Tracer C et C' .

EXERCICE N°9

On considère la fonction f définie sur $[-1,1] - \{0\}$ *par :* $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

1°)Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ *et interpréter les résultats obtenus*

2°)Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=-1 et interpréter le résultat obtenu.

4°)Montrer que : $\forall x \in]-1,1[- \{0\}$: $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$

5°)Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°)Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout x de J .*

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} *.*