DEVOIR DE SYNTHESE N°3

4ème Sciences expérimentales

Exercice 1 (5 points)

Une réserve ornithologique comporte trois espèces d'oiseaux: A, B et C. Lorsque l'on capture un oiseau au hasard, la probabilité qu'il soit de l'espèce A est de 0.3, la probabilité qu'il soit de l'espèce B est 0.45.

a) On capture 10 oiseaux au hasard. Quelle est la probabilité

1°) que les dix oiseaux proviennent de la même espèce ?

2°) qu'aucun oiseau ne provienne de l'espèce A ?

3°) qu'au moins trois oiseaux proviennent de l'espèce A ?

b) Tous les oiseaux sont exposés à un virus. 30 % des oiseaux de l'espèce A, 40 % des oiseaux de l'espèce B et 60 % des oiseaux de l'espèce C résistent au virus.

1°) On capture un oiseau au hasard. Il est atteint par le virus. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'espèce C ?

2°) Combien d'oiseaux faut-il capturer pour que la probabilité d'avoir au moins un oiseau de l'espèce C résistant au virus soit supérieure à 99 % ?

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 2)$.
La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Étude de la fonction f.

1. Etudier la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \int_2^3 [f(x) - x]\,dx$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$.
   Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de la droite (d) d'équation $y = x$.
   Tracer la droite (d) sur la feuille annexe
2. On pose $I = \int_2^3 [f(x) - x]\,dx$.
   (a) Donner une interprétation géométrique de I.
   (b) Montrer que, pour tout $X \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+X) \leqslant X$.
   En déduire que, pour tout x réel, $\ln(1 + 2e^{-x}) \leqslant 2e^{-x}$.
   (c) Démontrer que $0 \leqslant I \leqslant \int_2^3 2e^{-x}\,dx$.
   (d) Donner la valeur exacte de $\int_2^3 2e^{-x}\,dx$ et en déduire un encadrement de I d'amplitude 0,2.

EXERCICE 3:

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y'\ln 2 = 0$.
2. On considère la fonction numérique d'une variable réelle t définie par : $u(t) = e^{-t\ln 2}$.
   Déterminer la primitive de u qui prend la valeur 1 en 0.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par :

   $v_n = \int_{n-1}^{n} u(t)dt$ et on pose $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

   a) Montrer que (v_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   b) Calculer S_n et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice .

Dans cet exercice, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur approchée à 10^{-3} près.
Le coût annuel de maintenance d'un équipement informatique varie avec l'âge t des appareils.
Le tableau suivant indique, pour un même type d'équipement, ce coût y en fonction de t.
Dans ce tableau la troisième ligne correspond au logarithme népérien $z = \ln y$ du coût.

Âge t_i en années	1	2	3	4	5	6
Coût y_i en kF	14	15,5	18	20	23,3	28
$z_i = \ln y_i$	$\ln 14$	$\ln 15,5$	$\ln 18$	$\ln 20$	$\ln 23,3$	$\ln 28$

1. a. Représenter le nuage de points $M_i\ (t_i;\ z_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

   b. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ? Expliquer.

   c. Quelles sont les coordonnées $(t_G;\ z_G)$ du point moyen G de ce nuage ? Placer le point G sur la figure.

2. Déterminer, pour la série statistique double des deux variables $(t;\ z)$,

   a. le coefficient de corrélation linéaire r,

   b. une équation $z = at + b$ de la droite de régression linéaire D de z en t, par la méthode des moindres carrés.

3. a. Les résultats obtenus à la question 2. confirment-t-ils l'observation faite à la question 1. b. ?

   b. Tracer la droite D sur la figure. Que peut-on observer pour D et le point G ?

4. a. Déduire de la réponse à la question 2. b. une expression du coût y en fonction de l'âge t.

   b. Montrer que le coût y peut s'exprimer en fonction de l'âge t par une relation de la forme $y = k \times \alpha^t$, calculer k et α.

   c. En admettant que l'évolution constatée du coût pendant ces six années puisse être utilisée pour prévoir le coût de la maintenance les années suivantes, indiquer les valeurs à envisager pour $t = 7$ et $t = 8$.

Exercice 3 (7 points)

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}-2xe^{-x}$.

On donne le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On propose trois tableaux de variations parmi lesquels un seul est le tableau de variations de F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
F		$\nearrow$			3	$\nearrow$	

Tableau 1

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
F		$\nearrow$	e	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Tableau 2

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
F		$\searrow$	0	$\nearrow$			

Tableau 3

En justifiant votre choix, déterminer quel est le tableau de variations de F.

Partie B

n est un entier naturel non nul . On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=ne^{2x}-2xe^{-x}$

1° Montrer que pour tout réel x, $f_n'(x)$ est du signe de $g_n(x)$ avec g_n définie par : $g_n(x)=ne^{3x}-1+x$

2° a. Etudier les variations de g_n sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$.

b. Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$ que nous noterons a_n.

3° Déterminer la valeur exacte de a_1 .

Préciser par dichotomie une valeur approchée de a_2 à 10^{-2} par défaut.

4° Dans cette question on rappelle que n désigne un entier naturel non nul.

Justifier que $g_n\left(\dfrac{-\ln(n)}{6}\right)=\dfrac{6\sqrt{n}-\ln n-6}{6}$.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $6\sqrt{n}-\ln n-6\geq 0$ (On pourra étudier les variations de la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $x\to 6\sqrt{x}-\ln x-6$).

En déduire, en utilisant une comparaison, la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers l'infini.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.