



EXERCICE N° 01 (4 pts)

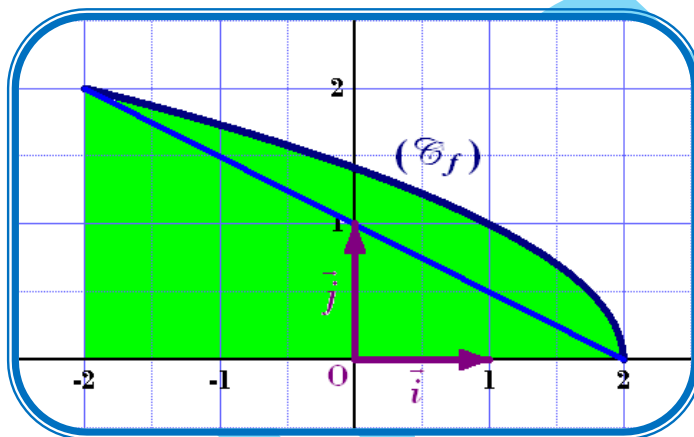
1-Cocher la réponse exacte :
D'après la représentation
graphique ci-contre

on a :

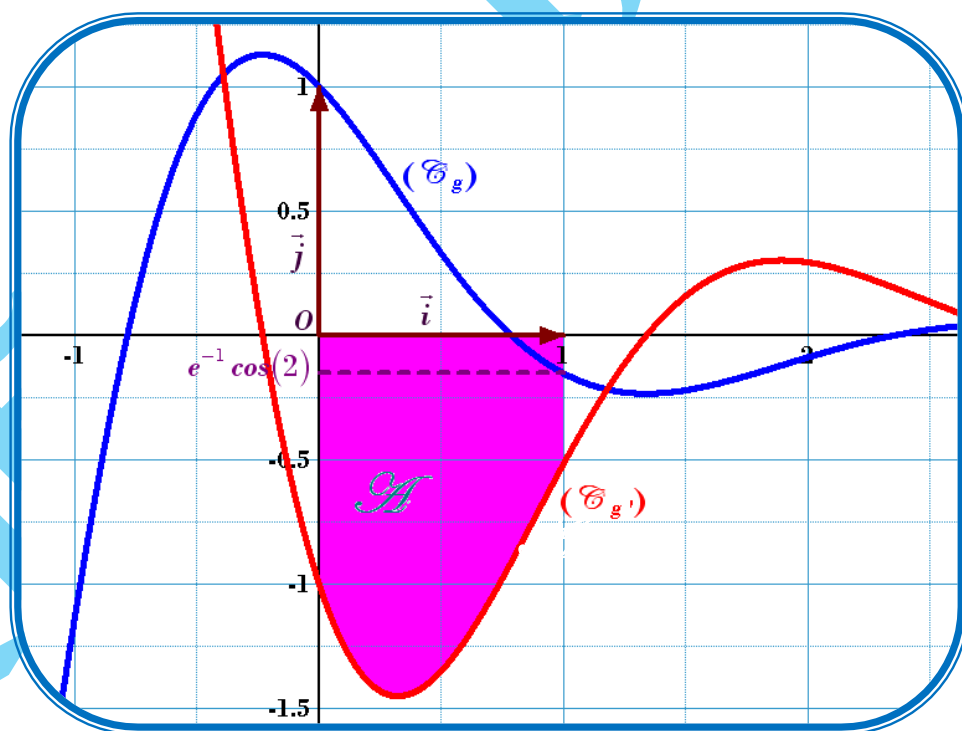
a) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 4$

b) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 8$

c) $\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{16}{3}$



2- Calculer la
surface \mathcal{H}



3-Répondre par vrai ou faux :

a) Soit f une fonction continue , dérivable sur $[a,b]$, telle que f' soit continue sur $[a,b]$ et g une fonction continue , dérivable sur $f([a,b])$, alors :



$$\int_a^b g \circ f(x) \times f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t) dt \quad \square$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{a-\frac{\pi}{2}}^{a+\frac{\pi}{2}} |\cos(nt)| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(nt)| dt \quad \square$$

4- Où est l'erreur ?

Soit $h(x) = \ln(x^x)$; $x \in \mathbb{N}^*$

D'une part on a : $h(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow h'(x) = 1 + \ln(x)$ ❶

D'autre part, on a :

$$h(x) = \ln(x^x)$$

$$= \ln \left(\underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{x \text{ fois (car } x \in \mathbb{N}^*)} \right)$$

$$= \underbrace{\ln(x) + \ln(x) + \dots + \ln(x)}_{x \text{ fois}} \Rightarrow h'(x) = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{x \text{ fois}} = 1 \quad \text{❷}$$

❶ et ❷ donnent : $\ln(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}^*$!!!???

EXERCICE N° 02 (5 pts)

Soit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$; $x \in [0,1]$

1-a) Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

b) Calculer $I = \int_0^1 \sin(\pi \cdot x) dx$.

c) Interpréter graphiquement cette intégrale.

2- Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

a) Interpréter graphiquement S_n en introduisant les rectangles R_k de base $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$

et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $0 \leq k \leq n-1$. Faire la figure pour $n=6$.

b) Montrer que $1 + e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2i\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}$



c) En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left[\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

e) Comparer les résultats des questions 1- et 2-. Conclure.

EXERCICE N° 03 (6 pts)

Soit $f(x) = e^{3x} - e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in [0,1]$

b) Prouver que $\ln(1 + e^{-\alpha}) = 2\alpha$

3- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x})$

a) Montrer que $g(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

4- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$



EXERCICE N° 04 (6 pts)

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

-I-

Soient $A(3;2;4)$, $B(0;3;5)$, $C(0;2;1)$ et $D(3;1;0)$

1- a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Calculer \mathcal{A} l'aire du parallélogramme $ABCD$.

2- Soit E le point définie par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

Déterminer les coordonnées de E .

3- Calculer le volume \mathcal{V} du prisme droit de base $ABCD$ et de hauteur $[AE]$.

-II-

Soit $S_m = \{M(x; y; z) / x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y - 2(m+1)z - m - 2 = 0; m \in \mathbb{R}\}$

1- Montrer que pour tout réel m , S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m .

2- Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans \mathbb{R} .

3- Déterminer le plus petit rayon R_m des sphères S_m .

4- Montrer que toutes les sphères contiennent un cercle (\mathcal{C}) à préciser.

