

Lycées Tahar Sfar Mahdia	<b><u>Devoir de synthèse n° 3</u></b> Mathématiques	Classe : 4 <sup>ème</sup> Sc exp1
Date : 18 / 05 / 2019	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 3 heures

**NB** : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

**Exercice n°1** : (4 pts)

Une entreprise qui fabrique des moteurs, possède deux chaînes de fabrication A et B.

Une étude statistique montre que :

60% des moteurs proviennent de la chaîne A.

90% des moteurs produits par la chaîne A sont conformes.

80% des moteurs produits par la chaîne B sont conformes.

On prélève au hasard un moteur dans la production totale et on considère les événements :

A : Le moteur provient de la chaîne A.

B : Le moteur provient de la chaîne B.

C : Le moteur est conforme.

1) a/ Calculer la probabilité que le moteur est conforme et provient de la chaîne B.

b/ Montrer que  $p(C) = 0,86$ .

c/ Le moteur est conforme, quelle est la probabilité qu'il provient de la chaîne A ?

( On donnera la valeur arrondie à  $10^{-2}$  près ).

2) On considère un lot de  $n$  moteurs. Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des moteurs non conformes.

a/ Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b/ Calculer la probabilité de l'événement G : « Au moins un moteur soit non conforme ».

c/ Déterminer la valeur de  $n$  pour laquelle le nombre moyen des moteurs non conformes est égal à 56.

3) On admet que la durée de vie avant la première panne (en année) d'un moteur est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

a/ Sachant que  $p(Y \geq 1) = 0,88$ , montrer qu'une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $\lambda$  est 0,13.

b/ Quelle est la probabilité qu'un moteur tombe en panne avant 5 ans ?

c/ Un moteur à déjà fonctionné 5 ans, quelle est la probabilité qu'il ne tombe pas en panne avant 8 ans ?

**Exercice n°2 : (4 pts)**

On considère les équations différentielles  $(E): y' - y = e^x$  et  $(E'): y' - y = 0$ .

1) a/ Résoudre l'équation  $(E')$ .

b/ Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = xe^x$  est une solution de  $(E)$ .

c/ Montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de  $(E)$  si, et seulement si la fonction  $(\varphi - g)$  est solution de  $(E')$ .

d/ En déduire l'ensemble de solutions de l'équation  $(E)$ .

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - 2 + \int_0^x f(t) dt$ .

a/ Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est une solution de  $(E)$ .

b/ En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)e^x$ .

3) a/ Dresser le tableau de variations de  $f$ .

On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

b/ Soit  $\mathcal{D}$  l'aire de la région du plan limitée par  $C_f$ , l'axe  $(O, \vec{i})$ , les droites d'équations :  $x=0$  et  $x=1$ . Montrer que  $\mathcal{D} = e - 2$ .

**Exercice n°3 : (8 pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-1, +\infty[$  par :  $f(x) = -2x + x \ln(1+x)$ .

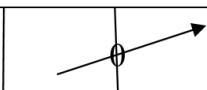
On désigne par  $\mathcal{E}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ .

b/ Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .

2) a/ Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(1+x)$ .

b/ Le tableau suivant indique le sens de variation de  $f'$ . Le réel  $\alpha$  vérifie  $f'(\alpha) = 0$ .

$x$	-1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$			

Vérifier que  $2 < \alpha < 3$ .

c/ Déterminer le signe de  $f'(x)$  sur  $]-1, +\infty[$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .

3) Dans la figure de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $C_g$  de la fonction  $g$  définie sur  $]-1, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{-x^2}{x+1}$ , la droite  $\Delta: x = -1$  et on a placé le réel  $\alpha$ .

a/ vérifier que  $\ln(1+\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$  et en déduire que  $f(\alpha) = g(\alpha)$ .

b/ Construire le point  $P$  d'abscisse  $\alpha$  de la courbe  $\mathcal{E}_f$ .

c/ Déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec  $(O, \vec{i})$ .

4) a/ Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

b/ Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la feuille annexe.

5) a/ Vérifier que pour tout  $x > -1$ ,  $g(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$ .

b/ Calculer  $\int_0^\alpha g(x) dx$ .

c/ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^\alpha x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(1+\alpha) + \frac{1}{2} \int_0^\alpha g(x) dx.$$

d/ On désigne par  $\mathcal{A}$  l'aire de la région du plan limitée par  $\mathcal{C}_f$ , la droite  $T$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\alpha$ .

Montrer que :  $\mathcal{A} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha - 4}{4}$ .

#### **Exercice n°4** : (4 pts)

Une maison d'édition a ouvert le premier janvier 2014, sur internet, un site de vente par correspondance.

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre des livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2016	Janvier 2017	Juin 2017	Janvier 2018	Juin 2018
Rang du mois $x_i$	1	13	18	25	30
Nombre de livres (en milliers) $y_i$	1,5	2,5	3	5	6

1) a/ Représenter le nuage de points associé à la série  $(x_i, y_i)$  dans un repère orthogonal.

b/ Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  de cette série.

2) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.

Pour cela on pose  $z_i = \ln(y_i)$ .

a/ Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang du mois $x_i$	1	13	18	25	30
$z_i = \ln(y_i)$		0,916			

b/ Ecrire une équation de la droite de régression  $D$  de  $z$  en  $x$  par la méthode de moindre carré.

c/ Déduire alors que  $y = 1,36.e^{0,049x}$ .

3) En supposant que l'évolution se poursuivre de cette façon.

a/ Donner une estimation, à l'unité près, du nombre de livres qui seront vendus en juin 2019.

b/ A partir de quel mois peut-on prévoir que le nombre des livres vendus dépasse 15 milliers?

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synhèse n°3 ( 18 / 05 / 2019 )

Nom et prénom : .....

Classe : 4<sup>ème</sup> Sc exp 1

arak

