

Exercice N°1(7pts)

On considère la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $1 \leq U_n \leq 2$

b) Etudier la monotonie de  $(U_n)$

c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente

2/ a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $(2 - U_{n+1}) \leq \frac{2}{3} (2 - U_n)$

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $(2 - U_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) Calculer alors la limite de la suite  $(U_n)$

3/ On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k \cdot U_k)$

a) Montrer que pour tout  $n$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $1 \leq k \leq n$  on a :

$$k(2 - U_k) \leq n \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

b) En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $0 \leq \frac{n+1}{n} - S_n \leq \frac{2}{n} \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$

c) Déduire alors que  $(S_n)$  est convergente

Exercice N°2 (5pts)

1/ a) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation ( E ) :  $17a - 4b = 1$

b) Vérifier Que Pour Tout Entier Naturel N On a :  $(4n + 1 ; 17n + 4)$  Solution de L'équation ( E )

c) En déduire que  $(4n + 1)$  et  $(17n + 4)$  sont premiers entre eux

2/a) Donner la division euclidienne de 2027 par 17

b) En déduire que 2027 et 2025 sont premier entre eux

3/a) Vérifier que l'entier 149 est premier

b) Soit  $a$  un entier naturel tel que :  $a \leq 149$  . Montrer que 149 divise  $(a^{148} - 1)$

4/On pose  $S(a) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{147}$

a) Montrer que  $a^{148} - (a - 1)S(a) = 1$

b) En déduire que  $a^{148}$  et  $(a - 1)$  sont premiers entre eux

c) Montrer alors que  $S(a)$  est divisible par 149

### Exercice N°3(4pts)

Une fermière possède 12 lapins  $\begin{cases} 5 \text{ mâles ; } 2 \text{ blancs et } 3 \text{ noirs} \\ 7 \text{ femelles ; } 2 \text{ blanches ; } 1 \text{ noire et } 4 \text{ grises} \end{cases}$

1) Elle décide de vendre 4 lapins choisis au hasard et simultanément

Calculer toutes les possibilités dans chacun des cas suivants

A « 4 lapins de même couleur »

B « 4 lapins de même sexe »

C « au moins 1 lapin blanc »

D « exactement 2 mâles blancs »

2) Le jour du marché elle décide de mettre les 12 lapins dans une cage

Elle prend successivement et sans remise 3 lapins de la cage

a) Calculer le nombre de tirage total

b) Calculer le nombre de tirages donnant 3 lapins de même couleur

c) Calculer le nombre de tirages donnant 3 lapins de couleurs différentes

d) calculer le nombre de tirages donnant un seul lapin gris et un seul lapin femelle

### Exercice N°4 (4pts)

$R = (\mathbf{O} ; \vec{U} ; \vec{V})$  est un repère orthonormé direct du plan complexe.

OABC est un carré de centre S tel que :  $OC = 2$  et  $(\vec{U} ; \widehat{OA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

1/a) Donner la forme trigonométrique de  $Z_A$  affixe du point A

b) Déduire la forme algébrique de  $Z_A$

2/ Déduire que  $Z_C = \sqrt{3} - i$

3/ Montrer que  $Z_B = Z_C + Z_A$

4/ Donner la forme trigonométrique de  $Z_B$  et de  $Z_S$

