Afli Ahmed	Devoir de Synthèse n°2	Lycée I.K. Jemmel
3MATH	Mathématiques	22/05/2017

Exercice 1 :(6 points)

I. Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = x.\sin x+\cos x - 1$.

1.) Dresser le tableau de variation de h.

2.) En déduire le signe de h(x) pour tout $x \in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

II. Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par : $\begin{cases} f(x) = 2\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1.) a. Montrer que f continue en 0.

b. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser f '(0).

c. Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) on point d'abscisse 0.

d. Etudier la parité de f.

2.) a. Montrer que pour tout x $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\backslash\{0\}$ on a : f ' (x) $= \frac{2.h(x)}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variation de f.

3.) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité : 3cm).

Exercice 2 :(4,5points)

Soit la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_n = u_{n+1} - u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1.) Prouver que (x_n) est une suite géométrique.

2.) Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$.

3.) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Exprimer S_n en fonction de n.

4.) Profiter de 3.) pour exprimer u_n en fonction de n.

5.) a. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$; $P_n = \prod_{i=0}^{n-1} x_i = x_0.x_1.x_2.\dots\dots\dots.x_{n-1}$

b. La suite (P_n) est-elle convergente ? Si oui calculer sa limite.

Exercice 3 : (5,5points)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit S $=\{M(x,y,z) \in \xi : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0 \ \}$

On considère les points A$(-2\ ;0\ ;0)$, B$(0\ ;1\ ;0)$ et C$(0\ ;0\ ;-1)$

1.) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R

2.) a. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + 2z + 2 = 0$

3.) a. Montrer que Les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires.

b. Calculer le volume V du tétraèdre ΩABC.

c. Calculer l'aire du triangle ABC .En déduire la distance du point Ω au plan (ABC).

d. En déduire que l'intersection de la sphère S et le plan (ABC) est un cercle dont on précisera le centre E et le rayon r.

4.) Soit $M(a, b, -1)$ un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une equation cartésienne est : $(a-1)x + (b+2)y + z - a + 2b + 3 = 0$.

a. Montrer que M appartint à Q.

b. Montrer que S et Q sont tangents en M.

Exercice 4 : (4points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 2 \times 10^n + 1 \qquad et \qquad b_n = 2 \times 10^n - 1$$

1.) Montrer que par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, a_n est divisible par 3.

2.) a. Le nombre b_3 est-il composé ? Justifier votre réponse.

b. Justifier que le nombre $2^{1998} - 1$ est divisible par b_3 .

3.) a. Montrer que $a_n \wedge b_n = b_n \wedge 2$.

b. Déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

4.) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $a_3(x-2) = b_3(y-3)$.

Bon Travail

Bonnes Vacances