DEVOIR DE SYNTHESE N° 2 **Epreuve : Mathématiques** **Mars 2014**	**Section :** $3^{\text{iéme}}$ Math **Durée : 3 h** **Prof : Arfaoui - khaled**

Exercice n°1 (5pts)

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$;

$E = S_{(AD)}(O)$; $I = S_C(B)$; $(AE) \cap (BC) = \{J\}$ et k le milieu de $[IJ]$

1/ faire un schéma

2/ a) Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que tels que R(A) = C et R(E) = O
b) Déterminer l'angle et le centre de la rotation R

3/ a) Déterminer R(AB) et R(BD)
b) En déduire R(B) = I

4/ Soit R' une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ tel que $R'(J) = E$ et $R'(E) = I$

a) Déterminer $R' o R' (J)$
b) Déduire que K est le centre de R'

5/ Qu'elle est la nature de $Ro R'$? justifier votre réponse .

Exercice n°2 (3 pts)

1/ a) Montrer que : $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos(x+ \frac{\pi}{6})$

b)Résoudre dans IR puis dans $[0 ; 2\pi[$, l'équation : $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

2/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2 \cos(2x - \frac{\pi}{6})}{3 \cos x - \sqrt{3} \sin x}$

a) Déterminer le domaine D_f de définition de f

b) Montrer que pour tout x de D_f : $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin (x + \frac{\pi}{6})$

c) Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$, l'inéquation : $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice n°3 (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{J}$) . On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 - i$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = \sqrt{3} - i$

1/ a) Placer les points A , B et C

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle

c) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes $z_A{}^2$ et $\frac{z_A}{z_B}$

2/ a) Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C

b) Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3/ a) Montrer que OB = OC

b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OB}})$

c) E n déduire que B est l'image de C par une rotation que l'on précisera

4/ Déterminer et construire les ensembles suivants

$E = \{ M(z) \in P \text{ tel que } |z + 1 + i| = 2 \}$

$F = \{ M(z) \in P \text{ tel que } |iz + \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} - i| \}$

Exercice n°4 (7 pts)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$. On note ξ_f sa courbe Représentative dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{J}$) (unité 2 cm)

1/ a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$. Interpréter graphiquement ce résultat

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et Interpréter graphiquement ce résultat

2/ a) Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3/ a) Déterminer une équation de la tangente T *à* ξ_f au point d'abscisse 0

b) Etudier la position de ξ_f par rapport à T

c) Tracer T et ξ_f

4/ Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = f(|x|) + 1$

a) Etudier la parité de g

b) Monter la courbe de g se déduit de la courbe de f par une transformation que l'on précisera

c) Tracer dans le même repère et avec une autre couleur la courbe de g