

<b>LYCEE BOUMERDES</b>	<b>Devoir de Synthèse N°1</b>	<b>4<sup>ème</sup> Sc 1&amp;2</b>
<b>Le Mercredi 24/01/2018</b>	<b>MATHEMATIQUES</b>	<b>Durée : 2 H</b>
<b>BRAIEK KHALIFA</b>		

« Rien ne sert de courir, il faut partir à point »

Exercice N°1 (3pts)

I°)

Cet exercice est constitué de questions à choix multiples. Le candidat reproduira sur sa copie soigneusement la lettre désignant la bonne réponse et le texte de celle-ci

1) Soit  $f$  la bijection définie de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \sin x$ .

Alors  $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$  est égal à :

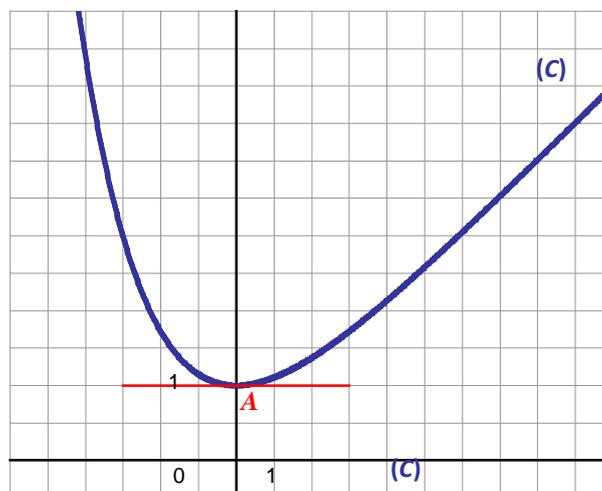
- a-)  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$  .      b-)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  .      c-)  $\frac{-2}{\pi\sqrt{3}}$

2°) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 1)^n(x - 2)^{n+1}(x - 3)^{n+2}$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$

Alors la courbe représentative de  $f$  admet :

- a-) Au moins deux tangentes horizontales.  
b-) Au moins trois tangentes horizontales  
c-) Admet une seule tangente horizontale.

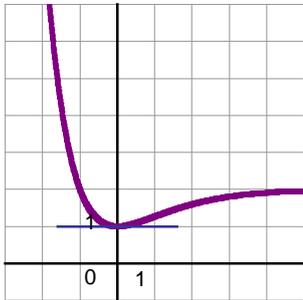
II°) La courbe (C) tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



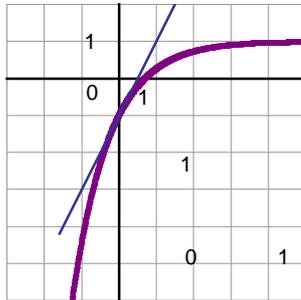
1. Au point  $A(0;1)$ , la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. En déduire  $f(0)$  et  $f'(0)$ .

2. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive  $F$  de la fonction  $f$ . Déterminer la courbe associée à la fonction  $F$ . (en justifiant la réponse)

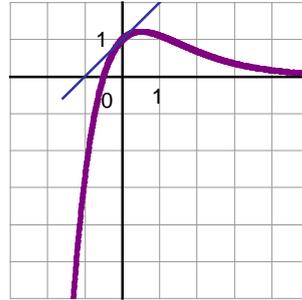
Courbe 1



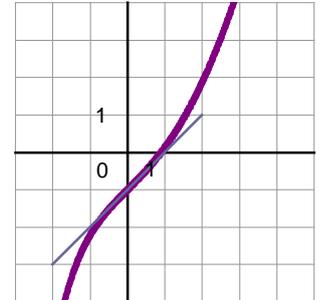
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



Exercice N°2 (5pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1, -1, 0)$  ;  $B(3, 11)$  ;  $C(3, 0, 0)$  et  $D(0, 1, 1)$ .

- 1) a- Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .

b- En déduire que A, B et C forment un plan P.

c- Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est :  $x - 2y + 2z - 3 = 0$ .

- 2) a- Calculer l'aire du triangle ABC.

b- Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c- Calculer le volume V du tétraèdre ABCD.

d- En déduire la distance de D au plan P.

- 3) Soit la droite  $\Delta : \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$

a- Montrer que  $\Delta$  est perpendiculaire à P.

b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de P et  $\Delta$ .

c- En déduire la distance de A à la droite  $\Delta$ .

### Exercice N°3 : (5points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

- 1) Montrer que  $f$  admet des primitives sur  $[1, +\infty[$
- 2) Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  qui s'annule en 1. Donner le sens de variation de  $F$ .
- 3) Soit  $G$  la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  par  $G(x) = F(\frac{1}{\cos x})$ .
  - a) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et que  $G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ .
  - b) En déduire que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $G(x) = \tan(x) - x$
  - c) Calculer  $F(\sqrt{2})$  et  $F(2)$
- 4) Soit la fonction  $h$  définie sur  $]1, +\infty[$  par  $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ . Déterminer la primitive  $H$  de  $h$  sur  $]1, +\infty[$  qui s'annule en  $\sqrt{3}$ .

### Exercice N°4 (7pts)

Le graphique ci-dessous (voir le page 4) est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $]1, 2]$  dans un repère orthonormé  $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j})$ .

La droite d'équation  $x=1$  est une asymptote à  $C$ .

l/1) Par lecture graphique :

a) donner  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1, 2]$  sur un intervalle  $J$ . Que l'on déterminera.

c) Construire la courbe  $C'$  de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j})$  à la page 4

d) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable à droite en 0 et déterminer  $\left(f_d^{-1}\right)'(0)$

2) On admet que  $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$

a) Montrer que l'équation  $f(x)=x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1, 2]$

Vérifier que  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

b) Montrer que pour tout  $x \in [0, +\infty[$  on a  $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3) On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $1 \leq u_n \leq 2$ .

b) Sachant que  $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  pour tout  $x \in [1, 2]$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \alpha|$ . Montrer alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$$

c) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite

II/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  par  $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\tan 2x)} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$   $g(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x}$

2) a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  et  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$ .



