

Le sujet comporte 2 pages numérotés de 1 à 2
Une copie non soignée sera sanctionnée.

Exercice 1 (5 points)

On note : $u = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Donner la forme exponentielle de u , puis vérifier que : $u^3 = -1$ et que $1 - u + u^2 = 0$.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - u^2 z - u = 0$.
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives z , $-u z$ et $u^2 z$. ou z est un nombre complexe non nul.
 - Montrer que O est le centre de gravité du triangle ABC .
 - Montrer que $z_P = -u^2(z_N - z_M) + z_M$.
 - Déduire la nature du triangle ABC

Exercice 2 (5 points)

l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 0, 2)$ et $C(3, -2, 2)$.

- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - On note \mathcal{P} le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de \mathcal{P} est : $x + y - z + 1 = 0$.
- Soit $\mathcal{S} := \{M(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z - 1 = 0\}$
 - Montrer que \mathcal{S} est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R .
 - Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC .
 - Déterminer le centre et le rayon du cercle \mathcal{C} .
- Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$
Montrer que Δ est tangente à la sphère S .
- Montrer que pour tout point M de Δ , le volume du tétraèdre $MABC$ est constant.

Exercice 3 (3 points)

Pour tout $n \geq 1$ on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$.

2. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

3. (a) A l'aide d'une double intégration par parties montrer que :

$$a_n = \frac{\pi}{(n+2)(n+1)} - \frac{\pi^2}{(n+2)(n+1)} a_{n+2}$$

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n$

Exercice 4 (7 points)

1. Pour tout réel x de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{t^2}{1+t^2} dt$

(a) Montrer que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = \tan^2 x$.

(b) Dédire que pour tout réel x de I on a $F(x) = \tan x - x$.

(c) Calculer alors l'intégrale $\xi = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 2[$ par $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne ci-contre le tableau de variation de φ .

x	0	2
$\varphi'(x)$		+
$\varphi(x)$	0	$\rightarrow +\infty$

(a) Étudier la position relative de (\mathcal{C}) par rapport à la droite $\Delta : y = x$ puis tracer (\mathcal{C}) et Δ .

(b) Montrer que φ possède une fonction réciproque φ^{-1} définie et continue sur un intervalle J que l'on précisera.

(c) Tracer (\mathcal{C}') la courbe représentative de φ^{-1} .

(d) Montrer que pour tout $y \in J$ on a : $\varphi^{-1}(y) = \frac{2y^2}{1+y^2}$

(e) Calculer en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .