

Exercice1 (4 points)

La figure ci-dessous représente un parallélépipède rectangle tels que :

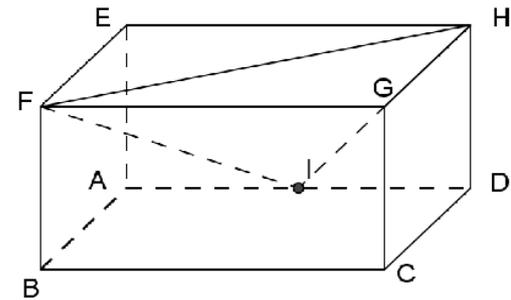
$AB = 1$, $AD = 2$ et I le milieu de $[AD]$.

1) On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(\vec{AA}, \vec{AI}, \vec{AE})$

- Déterminer les coordonnées des points F , G , H et I .
- Montrer que le volume de tétraèdre $GFHI$ est $V = \frac{1}{3}$
- Montrer que le triangle FIH est rectangle en I
- En déduire la distance du point G au plan (FIH)

2) Soit $M(\alpha, 2\alpha, \alpha)$ où α est un réel différent de $\frac{1}{3}$

- Montrer que les points I , F , H et M ne sont pas coplanaires
- Calculer en fonction de α le volume de tétraèdre $IFHM$
- Déterminer la position du point M pour que le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$ soit 6 fois du tétraèdre $IFHM$

**Exercice2 (5 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère \mathbb{C} dans l'équation (E) : $z^2 - 4z - 2\bar{z} + 8 = 0$

- Vérifier que $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ est une solution de (E)
- Soient A , B et C les points d'affixes respectives 2 , α et $\bar{\alpha}$
 - Vérifier que les points A , B et C appartiennent à un même cercle (ζ) dont on précisera le centre et le rayon
 - Construire A , B et C
- Soit D un point de (ζ) tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OD}) \equiv \theta[2\pi]$
Placer le point E d'affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$
- Soient F et G les milieux respectives des segments $[BD]$ et $[CE]$
 - Justifier que $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$
 - Montrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$
 - En déduire que le triangle AFG est équilatéral

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$

1/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, 2]$

2/ La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 2 ?

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$

On **admet** que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

4/ Soit $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 2]$

a. Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$ et calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, 2[$

b. Calculer $g(1)$. En déduire que pour tout x de $]0, 2[$ $g(x) = 0$

c. Interpréter le résultat obtenu

Exercice 4 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = 1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

1) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1}$ et interpréter le résultat obtenu

b. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter le résultat obtenu

d. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans **l'annexe**

2) a. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Montrer que pour tout x de J , $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$

3) Sur **l'annexe** ci-jointe on a représenté les courbes C de f^{-1} et C' de sa dérivée seconde $(f^{-1})''$

Construire le point d'inflexion A de la courbe C ainsi la tangente T au point A .

4) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 \leq U_n \leq 1$

b. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{5}|U_n - 1|$

c. En déduire que $|U_n - 1| \leq (\frac{2}{5})^n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

5) Pour tout entier naturel n on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$-\frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \leq S_n - (n+1) \leq \frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Annexe à rendre



Nom et prénom :..... Classe : 4^{ème} Sc2