Lycée secondaire : Ibn Rochd		Année scolaire : 2016-2017
Prof : MAATALLAH	Devoir de Synthèse n° 1	Classe : 4SC
Epreuve : Mathématiques	Date : 28-12-2016	Durée : 2 heures

Exercice n° 1 : (6 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,\pi]$ et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $(1-i)z^2-2(\sin\theta+\cos\theta)z+1+i=0$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $Im(z_1)\geq 0$ pour tout réel θ de $[0,\pi]$.

1) Sans calculer z_1 et z_2 trouver une relation entre leurs modules .

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 .

b) Préciser la valeur de θ pour laquelle $z_1=z_2$. Calculer dans ce cas $(z_1)^{2016}$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=ie^{-i\theta}$

a) Trouver l'ensemble $\mathcal{C}_1$ décrit par M_1 et l'ensemble $\mathcal{C}_2$ décrit par M_2, lorsque θ varie dans $[0,\pi]$. Vérifier que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice .

b) Déterminer les réels $\theta\in[0,\pi]$ pour que OM_1M_2 soit un triangle équilatéral .

Exercice n° 2 : (6 points)

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur IR par $U_0=3$ et les relations : $U_{n+1}=\dfrac{U_n+V_n}{2}$ et $V_n=\dfrac{7}{U_n}$

1) Calculer V_0, U_1, V_1, U_2 et V_2 . Justifier par récurrence que $\forall n\in$ IN, $U_n>0$ et $V_n>0$.

2) a) Démontrer que $\forall n\in$ IN , on a : $(U_n+V_n)^2-28=(U_n-V_n)^2$

b) En déduire que $U_{n+1}-V_{n+1}=\dfrac{1}{4U_{n+1}}\left[U_n-V_n\right]^2$. Conclure que $\forall n\in$ IN on a : $U_n-V_n\geq 0$

3) Prouver que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante

4) a) Démontrer que $\forall n\in$ IN*, $U_n\geq\dfrac{21}{8}$

b) Montrer que $U_{n+1}-V_{n+1}\leq\dfrac{1}{10}(U_n-V_n)^2$. En déduire que $U_n-V_n\leq\dfrac{1}{10^{2^n-1}}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)$.

5) Conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice n° 3 : (8 points)

Soit f une fonction définie sur $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$. On a représentée dans un R.O.N une partie de (C_f) sur $[0,\sqrt{6}]$ (*voir page 2*) . $\forall x\in[0,\sqrt{6}]$, $f(x)=h(x)-P(x)-3$ où $P(x)=ax^2+b\ +c$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

Soit h une fonction définie sur $[0,\sqrt{6}[$, dérivable sur $[0,\sqrt{6}[$ et est représentée dans le même repère par (C_h) .

Δ est la tangente à (C_h) au point $\mathcal{A}$. On admet que $\forall x\in[0,1]$, $h(x)=0$.

1) a) Montrer que $\forall x\in[0,\sqrt{6}]$: $P(x)=x^2-5$. Déduire $f(x)$, $\forall x\in[0,1]$.

b) Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que l'équation : $f(x)=h(x)$ admet dans $[1,\sqrt{5}]$ une solution unique α . Calculer α et montrer que $f(\alpha)>0$.

c) f est une primitive d'une fonction impaire g sur $]-\sqrt{6},\sqrt{6}[$. Etudier la parité de f et calculer $f(-\sqrt{2})$

2) On suppose que $\forall x\in[1,\sqrt{6}]$, $h(x)=u\circ P(x)$.

a) Montrer que $u'(0)=1$. Etudier la dérivabilité de u à gauche en 1 .

b) Dresser le tableau de variation de u . Montrer que u est bijective .

c) Déterminer une équation de la tangente T à $(C_{u^{-1}})$ au point d'abscisse 1 . u^{-1} est-elle dérivable en 2 ?

d) Construire $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_{u^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.