Lycée secondaire Ettaoufik Sousse 	**Enseignant** : Mr FERSI Lotfi

Date :10/12/2014 	**Devoir de synthèse N°1** 	**Niveau:4ème sc.exp**

Nombre de pages : 2 	Durée : **2h**

MATHEMATIQUES

NB : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.

EXERCICE N° 1(3 pts)

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

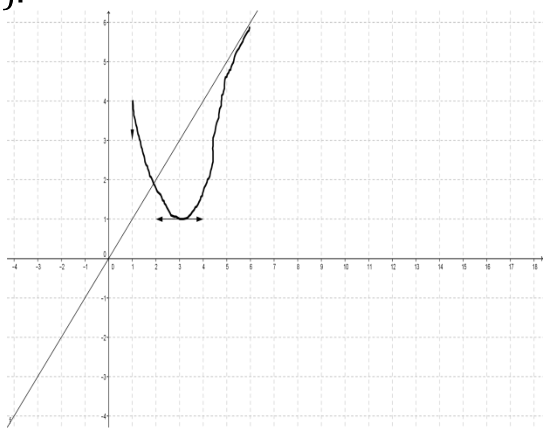
a) Si A est B sont les points dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $250z^2 - 1000iz + 1014-11015i = 0$, alors le milieu de [AB] est K(0 ;2).

b) L'ensemble des points M(z) tel que $|z| = |\bar{z} - 2i|$ est la droite y=2 .

2) Si f est une fonction dérivable sur IR* et $g(x) = f(\frac{1}{x})$, alors

$g'(x) = -\frac{1}{x} f'(\frac{1}{x})$.

3) On donne ci-contre la courbe ζ d'une fonction f définie sur $[1 ;+\infty[$ d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.



a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-4}{x-1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)-x} = +\infty$

EXERCICE N° 2 (6 pts)

1) a) Calculer $(1+3i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$z^2 - (3+i)z + 4 = 0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle qu'on déterminera .

b) Résoudre alors (E).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 1-i$.

a) Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 .

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$

c) En déduire que le triangle OAB est rectangle en O.

4)a) Mettre sous forme trigonométrique et algébrique le nombre $e^{2i\frac{\pi}{3}} . z_1$

b) En déduire que $\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE N° 3 (5 pts)

Soit θ un réel dans $]0\,;\pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E): $(1-i)z^2 - 2(1+e^{i\theta})z + (1+i)(1+e^{i\theta})^2 = 0$.

1) a) Résoudre l'équation (E).

b) Ecrire les deux solutions sous forme exponentielle.

2) Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 1+e^{i\theta}$ et $z_2 = i(1+e^{i\theta})$.

Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $]0\,;\pi[$.

3)a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle rectangle en O.

b) Soit B le point d'affixe 2i , déterminer le réel pour que OM_1BM_2 soit un carré.

EXERCICE N° 4 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

1)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement .

b) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ et dresser le tableau des variations de f.

c) Déterminer f(IR).

2) Montrer que le point I(0 ;1) est un point de ζ et qu'il est un centre de symétrie de ζ .

3)a) Montrer que la fonction définie par g(x) = f(x) + x est strictement croissante sur IR.

b) En déduire que l'équation f(x) = -x admet dans IR une solution unique α , puis que $-1 \prec \alpha \prec 0$.

c) Vérifier que $\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$.

4) Montrer que les droites Δ : y = x et Δ' : y = x+2 sont deux asymptotes obliques à la courbe ζ' de la fonction g.