

Prof :B.Anis

Classe :

4^{ème} sc-exp₂

Devoir de contrôle n°1

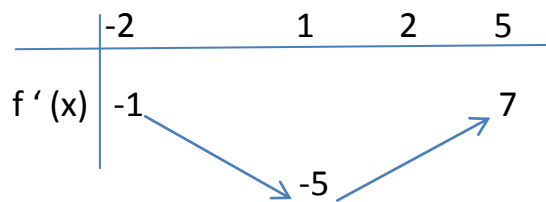
Mathématiques

Durée :2h

EXERCICE N°1(4 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1)



Le tableau ci-dessus est celui de la fonction dérivée d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-2,5]$. On appelle (C) la représentation graphique de f .

a) f admet un minimum en 2.

b) (C) admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation: $y=5x$.

c) (C) admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

2) Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $az^2+z-a = 0$; où a est un nombre complexe non nul ; sont inverses.

EXERCICE N°2(5.5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$.

1) a) Montrer que $\forall x \in [6, +\infty[; |f'(x)| \leq \frac{2}{7}$.

b) Montrer que $\forall x \in [6, +\infty[; f(x) \leq x$.

c) Résoudre dans $[6, +\infty[$ l'équation $f(x) = x$

4) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $U_n \geq 6 \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante.

c) En déduire que U est convergente et calculer sa limite

b) Montrer que $|U_{n+1} - 6| \leq \frac{2}{7}|U_n - 6| \forall n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que $|U_n - 6| \leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}$. Retrouver la limite de la suite U .

EXERCICE N°3(6pts)

1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + Z + 1 = 0$.

b) Écrire les solutions sous forme exponentielle.

c) En déduire les solutions de l'équation $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$.

2) Soit $P(Z) = Z^3 + (1 + i\sqrt{3})Z^2 + (1 + i\sqrt{3})Z + i\sqrt{3}$.

a) Vérifier que $P(-i\sqrt{3}) = 0$.

b) Déterminer les réels b et c tel que $P(Z) = (Z + i\sqrt{3})(Z^2 + bZ + c)$ puis résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(Z) = 0$.

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 + 2(1 - \cos \theta)Z + 2(1 - \cos \theta) = 0$

avec $\theta \in]0, \pi[$

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{U}, \vec{V}) . On donne les points A, B, C et I d'affixes respectives $Z_A = -2$, $Z_B = -1 + e^{i\theta}$ et $Z_C = -1 + e^{-i\theta}$

et $Z_I = -1$.

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A inscrit dans le cercle Γ de centre I et de rayon 1.

b) Vérifier que $BC = 2\sin \theta$ et déduire la valeur de θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

5) Dans la suite on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Placer les points A, B, C et I et le point D d'affixe $(-i\sqrt{3})$

b) Montrer que (ID) porte la hauteur du triangle ABC issue de C .

EXERCICE N°4(4.5pts)

Soit la fonction définie sur $[-1,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. \mathcal{C} désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1)a) Montrer que f est continue sur $[-1,1[$.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en (-1) . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f est dérivable sur $] -1,1[$ et que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} \forall x \in] -1,1[$.

2)a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $] -1,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

3) Soit g la fonction définie sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

Montrer que g est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x) = \frac{1}{1-\sin x} \forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Bon travail