Lycée Menzel Hayet Classe 4 Sc.exp	Devoir de Synthèse n °1 Mathématiques	Afli Ahmed Durée : 2h

Exercice 1 (3pts)

Choisir la réponse juste

1./ Sachant que $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ alors un argument de $i\cos(\theta)$ est :

$\boxed{a}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{b}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\boxed{c}$ $\frac{\pi}{2}+\theta$

2./ Soit f une fonction continue et négative sur $[2;+\infty[$ Vérifiant $f(2)=0$ et sa courbe admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2 dirigée vers le bas, alors : $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{-f(x)}}{x-2} =$

$\boxed{a}$ $-\infty$ $\boxed{b}$ $+\infty$ $\boxed{c}$ 0

3/ Soit l'équation (E) : $2z^2-(2+i)z+(\sqrt{3}+i)=0$ dont les solutions sont notées z_1 et z_2.
Alors : $Arg(z_1)+Arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$\boxed{a}$ Vrai $\boxed{b}$ Faux

4. / Les suites $U_n = \frac{1}{n}$ et $V_n = -U_n$ sont adjacentes

$\boxed{a}$ Vrai $\boxed{b}$ Faux

Exercice 2: (6pts)

Le plan complexe est rapporté à un repere orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1./ On designe par (E) l'équation : $z^2-(1+2\cos\alpha)z+1+\cos\alpha-i\sin\alpha=0$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

a. Vérifier que : $4\cos^2\alpha+4i\sin\alpha-3=(1+2i\sin\alpha)^2$

b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2./ Soit A et B deux points d'affixes resoectives : $z_A = e^{-i\alpha}$ et $z_B = 1+e^{-i\alpha}$

a. Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

b. Déterminer alors α pour que le triangle OAB soit rectangle en O

3./ Soit C le symetrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

a. Vérifier que $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin(\alpha)$

b. Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.

c. Déterminer α pour que ACBD soit un carré

Exercice 3: (5pts)

On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *par :* $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$

1. / a. *Etudier les variations de f.*

   b. *En déduire que f réalise une bijection de* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *sur* $[\frac{1}{2},+\infty[$

   c. *Calculer* $f^{-1}(1)$ *et* $f^{-1}(\frac{2}{3})$

   d. *Etudier la dérivabilité de* f^{-1} *à droite en* $\frac{1}{2}$ *.Interpréter graphiquement le résultat.*

2. / *Tracer dans le même repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *les courbes* C_f *et* $C_{f^{-1}}$

3. / *Montrer que* f^{-1} *est dérivable sur* $]\frac{1}{2},+\infty[$ *et que pour tout* $x \in]\frac{1}{2},+\infty[$ *on a :* $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{2x-1}}$

Exercice 4: (6pts)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, *par* $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ *et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. / a. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.*interpréter graphiquement les résultats.*

   b. *Montrer que f est dérivable sur* $]0\,;+\infty[$ *et que* $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

   c. *Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C)*

2. / *Montrer que l'équation* $\boldsymbol{f(x) = x}$ *admet dans l'intervalle* $[1\,;\sqrt{2}]$ *une unique solution* β

3. / *Montrer que* $\forall x \in]1;+\infty[$,*on :* $|\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{1}{2}$

4. / *Soit* (U_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} \boldsymbol{U_0 = 1} \\ \boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n), n} \in \mathbb{N} \end{cases}$

   a. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *, on a* $\boldsymbol{U_n \geq 1}$

   b. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *,on a* $|\boldsymbol{U_{n+1} - \beta}| \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{U_n - \beta}|$

   c. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *,on a* $|\boldsymbol{U_{n+1} - \beta}| \leq (\frac{1}{2})^{\boldsymbol{n}}$ *et calculer la limite de* (U_n).

Bonne Reflexion