Lycée 2 Mars | Prof : Hasni Mohsen

Classe : 4^{eme} Sc 2 : | Matiere : Mathematiques

Duée : 2 h

DEVOIR DE SYNTHESES N°1

EXERCICE 1 : (4 pts)

Dans chacune des questions suivantes une seule des trois reponses a) , b) et c) proposées est vraie . Dites la quelle .

1)Soit la fonction f : $x \mapsto \sqrt{x^2 + \quad 2}$, on a :

a) $D_f = R_+$ b) f est croissante sur R c) f est majorée sur R

2)Dans un plan complexe ,on considere les points A (2 + i) et B (-3 + 6 i) .On a :

a)Le Triangle OAB est equilateral .

b)Le triangle OAB est isocele.

c)Le triangle OAB est rectangle.

3)Soit α un réel , le conjugué du nombre complexe : z = 1 + $e^{i\alpha}$, est

a) 1 + $e^{i\alpha}$ b) 1 $- e^{i\alpha}$ c) 1 + $e^{-i\alpha}$

4)Soit f une fonction continue sur un intervalle [a , b] et qui s'annule en un réel ∝ ϵ [a , b] , on a alors :

a)f (a) = f (b) = 0

b) 0 est compris entre f (a) et f (b)

c) 0 ϵ $f([a , b])$.

EXERCICE 2 : (4 pts)

1)Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $\sqrt{3} + i$.

2)Soit : $z = 1 - \sqrt{3} + i\,(1 + \sqrt{3})$.

a)Montrer que : $z^2 = 8 . e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

b)En deduire que : $z = 2\sqrt{2}\; e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

3)Montrer que : z^{2010} est imaginaire pur .

EXERCICE 3 : (6 pts)

1)Verifier que : $[\, i\,(1 - e^{i\alpha})\,]^2 = -1 + 2e^{i\alpha} - e^{2i\alpha}$, $\alpha \in R$.

2) a)Resoudre dans C l'equation : $z^2 - 2i\,(1 + e^{i\alpha})z - 4e^{i\alpha} = 0$.

b)En deduire les solutions de l'equation :

$z^4 - 2i\,(1 + e^{i\alpha})\,z^2 - 4e^{i\alpha} = 0$.

3)On designe par A , B et C les points du plan complexe d'affixes respectives

2i , $\sqrt{3} - i$ et $2i\,e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0 , \pi]$.

a)Montrer que : $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\; e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

b)En deduire que : $z_A - z_C = 4\sin\frac{\alpha}{2}\; e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

c)Determiner α pour que le triangle ABC soit isocèle de sommet principal A .

EXERCICE 4 : (6 pts)

Soit la fonction f definie sur R par : f (x) = $\begin{cases} \dfrac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 2} & si\ \ x \le 1 \\ 1 + x - \sqrt{x^2 - 1} & si\ x > 1 \end{cases}$

1)Montrer que f est continue en 1 .

2Determiner la limite en $-\infty$ de f .

3)a)Montrer que pour tout $x > 1$: $f(x) = 1 + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

b) En deduire la limite en $+\infty$ de f .

4)On designe par g la fonction definie sur l'intervalle $I = [1 + \infty[$ par :
$g(x) = f(x) - x$.

a)Montrer que la fonction g est strictement decroissante sur I .

b)En deduire que g realise une bijection de I sur l'intervalle $]-\infty , 1]$.

c)Montrer qu'il existe un réel α dans l'intervalle I et un seul tel que f(α) $= \alpha$.

BONNE CHANCE