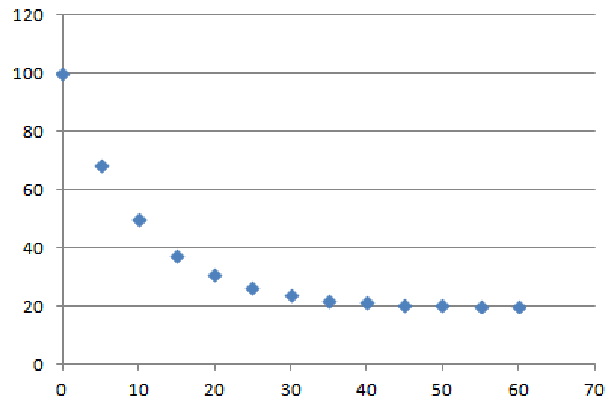
Lycées: Ibn Hytham Ghannouche **BACCALAURÉAT BLANC** **MAI** - *2017*	**Épreuve : MATHÉMATIQUES**
	Durée : 3 heures
	Coefficient : 3
$4^{éme}$ **Sciences exprimentalles**	**PROFS :** *G.hamza & Taeib*

EXERCICE 1 : (4 points)

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les cinq minutes, la température T de ce liquide.
Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de 20°C.

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T en °C	100	68.5	50	37.5	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

Le nuage de points associé à la série statistique (t,T) est représenté ci-contre :
Ce nuage permet d'envisager **un ajustement de type exponentiel.**



On pose $\theta = \ln(T-20)$
Les valeurs de θ, seront arrondies à 10^{-2} près.

1) Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.86	....	......	1.39	......	0.41	-0.11	......	....	-1.61

2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (arrondi à 10^{-4} près) de la série statistique (t, θ) .
   b) Un ajustement affine de θ en t par les moindres carrés est il alors possible ? Justifier.
3) Donner une équation cartésienne de la droite de régression D de θ en t.
4) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20 + \alpha.e^{\beta t}$ où α et β sont deux réels dont on donnera les valeurs arrondis à 0,1 près.

▲ Dans la suite, tout résultat doit être arrondi à l'unité.

5) a) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.
   b) Après combien de temps la température de cette tasse atteigne 28°C ? Expliquer.

EXERCICE 2 : (6 points)

Une entreprise fabrique des chemises en très grande série. Une chemise peut présenter deux types de défauts :

⁎ Un défaut de finition avec une probabilité de 0,03.

⁎ Un défaut de couleur avec une probabilité de 0,02.

■ La probabilité qu'une chemise ait les deux défauts à la fois est de 0,01.

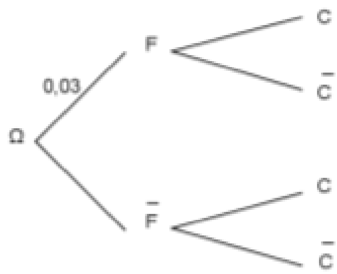
On considère les événements :

F : « La chemise présente un défaut de finition »

C : « La chemise présente un défaut de couleur »

A : « La chemise ne présente aucun défaut »

On peut modéliser ces données par l'arbre de probabilités ci-contre :



I/ 1) a) Donner la valeur de $p(C \cap F)$.

b) En déduire que $p\left(C \cap \overline{F}\right) = 0{,}01$

2) a) On sait que la chemise présente un défaut de finition. Montrer que la probabilité qu'elle ait un défaut de couleur est égale à $\frac{1}{3}$.

b) En déduire la probabilité que la chemise ait seulement un défaut de finition.

3) Montrer que la probabilité que la chemise ait un unique défaut est de 0,03.

4) Montrer que $p(A) = 0{,}96$

5) On considère un lot de 10 chemises emballées de cette entreprise. Un contrôle s'effectue sur l'état de chaque article de ce lot de façon indépendante. Soit X le nombre de chemises dans ce lot n'ayant aucun défaut. Calculer la probabilité (arrondi à 10^{-2} près) que 9 chemises de ce lot ne présentent aucun défaut.

II/ Une chemise (de cette entreprise) sans défaut est vendue à 40 DT. Son prix décroit à 30 DT si elle présente un seul défaut. Elle sera vendue à 20 DT si elle présente les deux défauts. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque chemise associe son prix de vente.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) Calculer le prix moyen d'une chemise.

III/ Dans cette entreprise on se sert de 10 machines identiques dans la fabrication des chemises. Chacune de ces machines a une durée de vie T (exprimée en années) qui suit une loi de probabilité exponentielle p de paramètre λ telle que $p(T > 5)=0{,}2$.

1) Montrer que $\lambda = \frac{ln5}{5}$

▲ Dans la suite, toute probabilité demandée doit être arrondi à 10^{-2} près.

2) Quelle est la probabilité qu'une machine n'est plus fonctionnelle après 3 années.

3) Quelle est la probabilité qu'une machine fonctionnait une années et pouvait tomber en panne au cours des deux années suivants.

4) Une machine a fonctionné une années. Calculer la probabilité qu'elle fonctionnait encore 2 années de plus.

EXERCICE 3 : (3 points)

1) Déterminer l'ensemble de solution de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x} + 2x + 1$

Vérifier que $g(x) = xe^{-2x} + x$ est une solution de l'équation (E)

3) a/ Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si (f-g) est une solution de (E_0)

b / Déduire l'ensemble des solutions de (E)

4) Soit h une solution de l'équation différentielle (E) telle que $h(0) = 1$

a / Vérifier que $h(1) = \frac{e^2 + 2}{e^2}$

b / En remarquant que $h(x) - x = \frac{1}{2}\left[e^{-2x} + 1 - h'(x)\right]$ Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (h(x) - x)\,dx$

c / Interpréter graphiquement l'intégrale I

EXERCICE 4 : (7 points)

I/ Soit la fonction $f : x \mapsto ln(1 - \sqrt{x})$; $x \in [0\,,1[$.

(C) étant sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O , I , J). (Voir l'annexe ci-joint).

1) a) En posant $t = 1 - \sqrt{x}$, montrer que $\frac{f(x)}{x} = \frac{lnt}{(1-t)^2}$. En déduire que $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) Interpréter cette limite géométriquement.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Montrer que $g(x) = (1 - e^x)^2$ pour tout $x \in$K.

c) Tracer dans le repère (O , I , J) la courbe représentative (C') de la fonction g.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe (O,I) et les droites d'équations : x=0 et x=$\frac{1}{4}$

a) Montrer que $\int_{-\ln 2}^{0} g(x)dx = \ln 2 - \frac{5}{8}$

b) En déduire que $\mathcal{A} = \left(\frac{5}{8} - \frac{3\ln 2}{4}\right)(u.a)$

II/ Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par : $h(x) = \ln\left(e^{2x}.g(x)\right)$. On désigne par (Γ) la courbe représentative de la fonction h dans le même repère (O , I , J).

1) a) Montrer que pour tout réel x< 0, ona : $h(x) = 2x + 2.\ln(1 - e^x)$.

b) En déduire que la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote oblique à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.

c) Montrer que pour tout réel x< 0, la courbe (Γ) est située au dessous de la droite Δ.

2) a) Montrer que : $h'(x) = \frac{2-4e^x}{1-e^x}$ pour tout réel x< 0.

b) Vérifier que $h\left(\ln(\frac{1}{2})\right) = 4.\ln(\frac{1}{2})$, puis établir le tableau de variation de la fonction h.

3) Tracer la droite Δ et la courbe (Γ). (On prend : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0{,}7$)

(Feuille à rendre)

Nom et prénom :………………………………………………………. Classe :…………………

(Annexe)