EXERCICE 1($5pts$)

1. Montrer que $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$, pour tout $t \in]0, +\infty[$

2. Soit $x \geq 1$.Déduire l'intégrale $\int_1^x \dfrac{dt}{t(1+t)^2}$

3. Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{(1+t)^3} dt$

   (a) En intégrant par parties, calculer $F(x)$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln 2 - \dfrac{1}{2})$

EXERCICE 2 ($8pts$)

Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

1. (a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$,pour tout $x \in]-1, +\infty[$

   (b) Dresser le tableau de variation de g.

2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α.

   (b) Montrer que $\alpha \in]-0.72\ , -0.71[$

   (c) En déduire le signe de $g(x)$,pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

3. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   (b) Interpréter ces résultats.

   (c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$,pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.

   (d) Dresser le tableau de variation de f.

4. (a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

   (b) Tracer C_f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.($1cm \to \left\|\vec{i}\right\|$ et $2cm \to \left\|\vec{j}\right\|$)
   On prendra sur le graphique $f(\alpha) \approx -2.45$.

5. Soit F la fonction définie sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ par: $F(x) = \ln x - \ln(x+1) - \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

   (a) Montrer que F est une primitive de f sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.

(b) Calculer l'aire A de la partie du plan,limiteé par C_f,l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e - 1$.

EXERCICE 3 ($7pts$)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Construire le cube $ABCDEFGH$.
2. Soient $I = G * B$, $J = G * F$ et L un point variable de $[GC]$ distinct de G et C.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FE}$ (sans utiliser les coordoneés)
   (b) En déduire l'aire A_1du tiangle GIJ.
   (c) Montrer que $\overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JG}$.
   (d) En déduire que l'aire A_2 du triangle LIJ ne dépend pas de la position du point L.
3. On pose $\overrightarrow{CL} = \alpha\overrightarrow{CG}$ avec $\alpha \in]0, 1[$.
   (a) Déterminer les coordonées des points A, B, C, D, E, F,G et H dans R.
   (b) Vérifier que $L\,(1, 1, \alpha)$ dans R.
   (c) Montrer que $d\,(L, (BH)) = d\,(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 - \alpha + 1)}$
   (d) Déterminer la position du point L pour que $d\,(\alpha)$ soit minimale.
4. Calculer le volume ϑ du tétraèdre $ALJI$.

BON TRAVAIL