

DEVOIR DE SYNTHESE N° 2**Epreuve : Mathématiques****Mars 2014****Section : 4^{ième} SC₁₊₂****Durée : 3 h****Prof : Arfaoui - khaled****EXERCICE N°1** (4pts)

Soit $F(x) = \int_0^{e^x - e^{-x}} \sqrt{4+t^2} dt$

1/ a-- Calculer $F(0)$ b-- Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$ c-- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \int_0^x (e^t + e^{-t})^2 dt$ 2/ Déterminer l'expression de $F(x)$ pour x de \mathbb{R}

3/ Soit $I = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{4+t^2} dt$ et $J = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{4+t^2}} dt$

a-- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^x - e^{-x} = 1,5$ b --Exprimer I en fonction de F et En déduire la valeur de I c-- A l'aide d'une integration par partie déterminer la valeur de J **Exercice n°2** (6pts)

On considère la fonction f , définie sur $]0 ; + \infty[$ par : $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$

On désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et à droite en 0 2/ Soit g la fonction définie sur $]0 ; + \infty[$ par : $g(x) = \ln x + x - 3$ a) Etudier les Variations de g b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0 ; + \infty[$
et que $\alpha \in] 2.2 ; 2.3[$ a) Etudier le signe de g sur $]0 ; + \infty[$ 3/ a) Montrer que f est dérivable sur $]0 ; + \infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ b) Dresser le tableau de variation de f c) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ d) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

4/ a) Etudier le signe de $f(x)$

b) Tracer ξ

5) a) Montrer que $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

b) Montrer que $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = 2$

c) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe ξ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$

Exercice n°1 (5 pts)

L'espace est rapporté à repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points $A(3, 2, 4)$; $B(0, 3, 5)$ et $C(3, 1, 0)$

1/ a) Vérifier que A , B et C ne sont pas alignés

b) On désigne par P le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de P est :
 $P: x + 4y - z - 7 = 0$

2/ Soit (S) la sphère de centre $I(2, -2, 5)$ et de rayon $3\sqrt{2}$

a) Vérifier que A appartient à (S)

b) Vérifier que le plan P est tangent à (S) et déterminer $P \cap (S)$

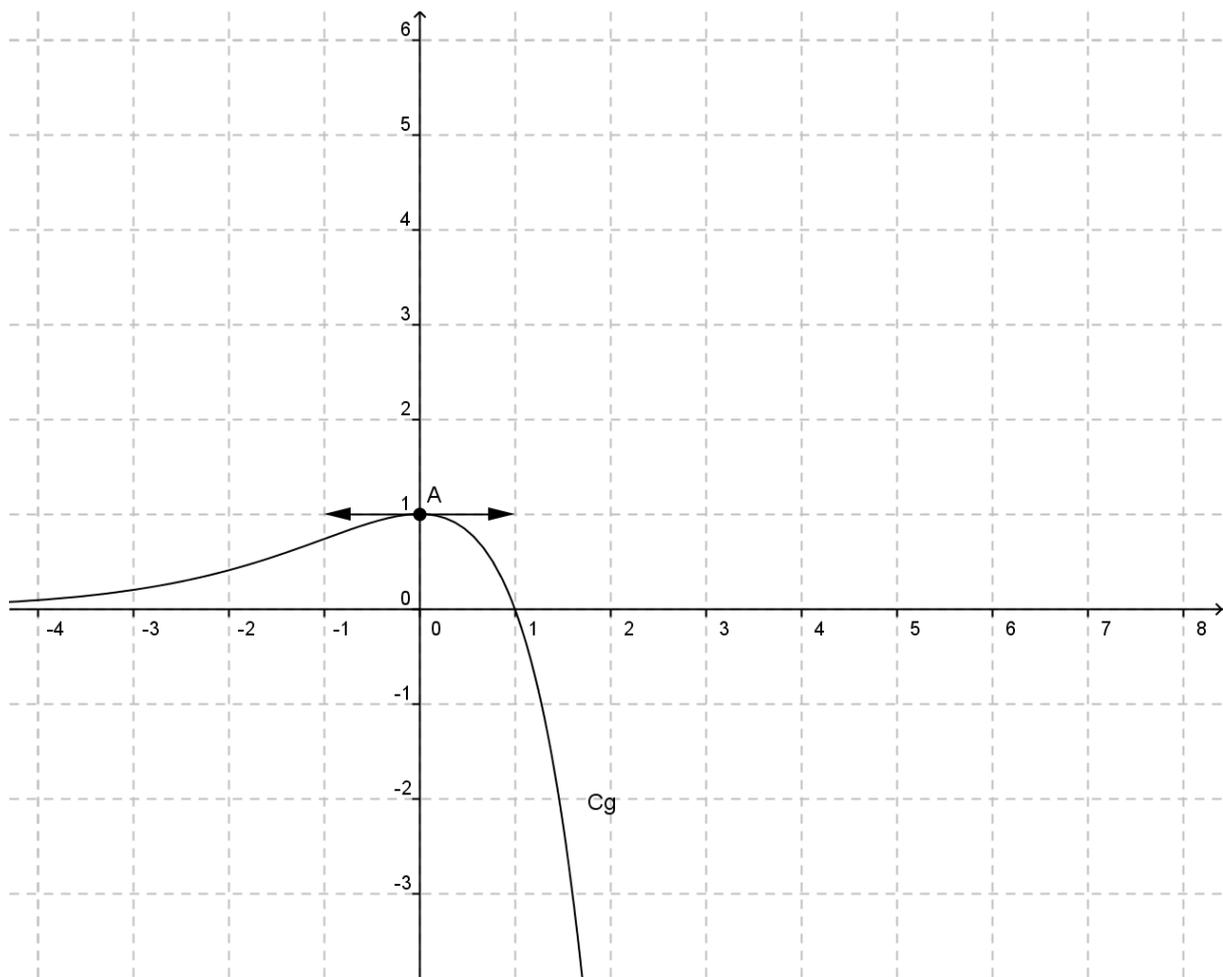
c) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$

3) Soit H le milieu du segment $[IA]$ et Q le plan passant par H et parallèle à P .

a) Montrer que (S) et Q sont sécants en un cercle ξ

b) Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de ξ

Exercice n°5 (5 pts)



On considère la fonction g dérivable sur \mathbb{R} , dont la courbe représentative ξ_g est représentée ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthonormé

1/ Sans justifier et par une lecture graphique

- Donner $g(0)$ et $g'(0)$
- Donner $g(1)$ et En déduire le signe de g sur \mathbb{R}
- Donner la limite de g en $-\infty$

2/ On admet que pour tout réel x , $g(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont deux réels

- Calculer $g'(x)$ en fonction de a et b
- En utilisant 1/ montrer que $a = -1$ et $b = 1$
- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe ξ_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

3/ On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(g(x))$

- Déterminer le domaine de définition de f
- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f à gauche en 1
- Dresser le tableau de variation de f