Devoir de synthèse N°2

EPREUVE : *Mathématiques*

LYCÉE: *Bechri* **A.S:** *2011/2012* **DURÉE:** *3 H* **PROF:** *Lahmadi Adel* **CLASSE:** *4 Sc-Exp 2*

EXERCICE N°1 (3 points)

*Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions suivantes.*
Une justification est demandée.

❶ $\int_{-1}^{1} |x|^{2011}\, dx = 0$

❷ Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Si $f \leq 1$ alors $\int_{0}^{1} f(x)\,dx \leq 1$

❸ Si F est une primitive d'une fonction f sur IR alors la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$.

❹ Toute fonction affine de coefficient directeur non nul réalise une bijection de IR sur IR.

EXERCICE N°2 (6.5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère:

- Les points $A(1,1,1)$ et $B(3,2,0)$
- Le plan P passant par le point B et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- Le plan Q d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$.
- La sphère S de centre A et de rayon AB.

❶ Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $2x + y - z - 8 = 0$

❷ Déterminer une équation de la sphère S.

❸ a) Calculer la distance du point A au plan Q. En déduire que le plan Q est tangent à la sphère S.
b) Le plan P est-il tangent à la sphère S ?

❹ On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan Q, noté C, a pour coordonnées $(0,2,-1)$.

a) Prouver que les plans P et Q sont sécants.

b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P et Q.

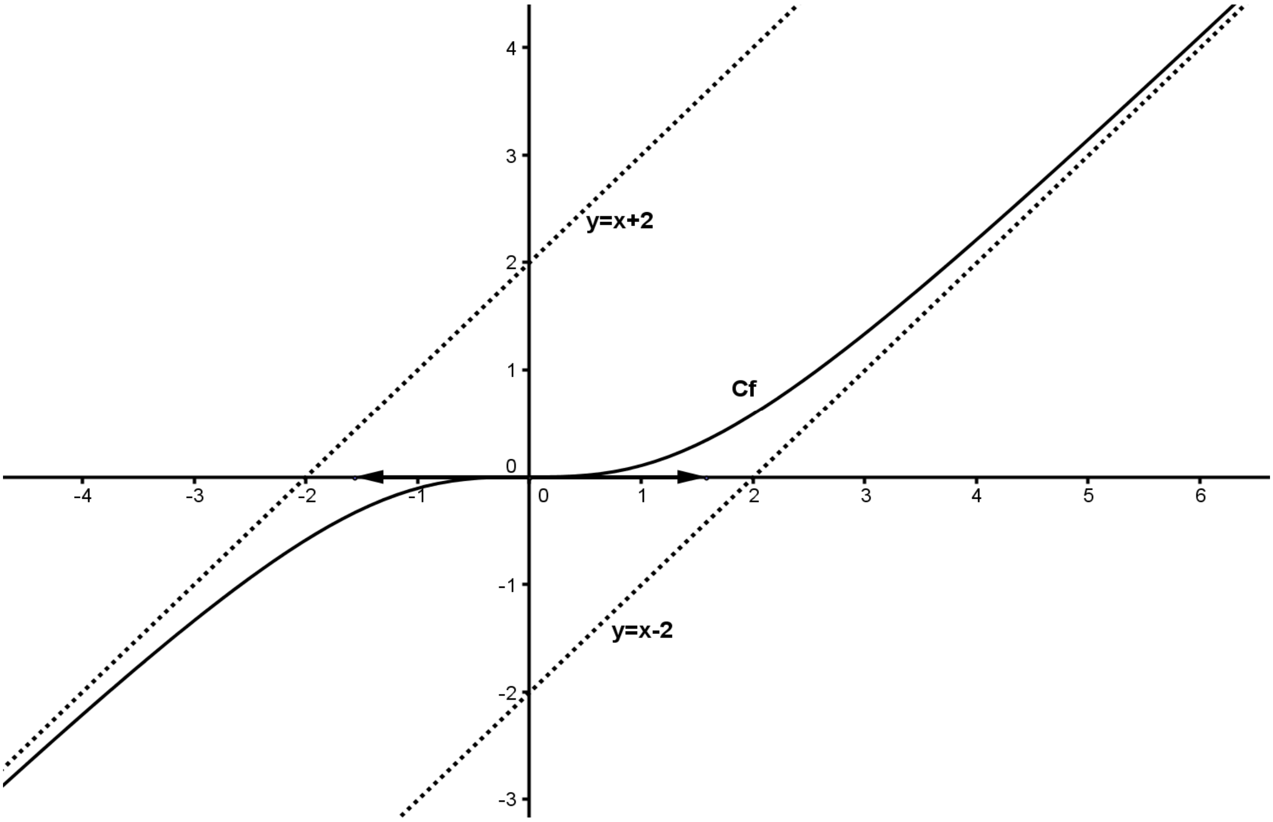
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 12 - 5\alpha \\ z = 4 - 3\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite Δ.

d) On appelle R le plan défini par le point A et la droite Δ
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
$\langle\langle$ Tout point du plan R est équidistant des points B et C $\rangle\rangle$
Justifier votre réponse.

EXERCICE N°3 **(6.5 points)**

La courbe Cf ci-dessous représente une fonction f définie sur IR dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'asymptotes $y=x+2$ et $y=x-2$.



I) En utilisant le graphique :

❶ Déterminer le tableau de variation de f.

❷ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

❸ f^{-1} est-elle dérivable en 0? Expliquer.

❹ Soit $\lambda\in\,]0;+\infty[$ et A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\lambda$

a) Vérifier que $x-2\le f(x)\le x+2$

b) En déduire que: $\dfrac{\lambda^2}{2}-2\lambda\le A_\lambda\le\dfrac{\lambda^2}{2}+2\lambda$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}A_\lambda$

II) La courbe Cf ci-dessus représente la fonction f définie sur IR par $f(x)=ax+\dfrac{bx}{\sqrt{x^2+4}}$

❶ Montrer que a=1 et b=-2 (**Ind:** utiliser $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$)

❷ Calculer A_λ en fonction de λ

❸ Retrouver $\lim\limits_{x\to+\infty}A_\lambda$.

EXERCICE N°4 **(4 points)**

On considère la suite (I_n) définie par : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt$ et $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

❶ Calculer I_0 et I_1

❷ Montrer que (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

❸ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

❹ Montrer que : $\forall t \in [0;1], \quad 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

❺ En admettant que: $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$, déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Bon Travail