Prof :Khammour.Khalil
Année Scolaire :2013/2014

Devoir à la maison n°2

$4^{ème}$ Sc-exp
Tunis ,Tél :27509639

Exercice n°1 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. Indiquer sur votre copie, le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1) $\int_{\ln 4}^{\ln 2} \frac{1}{t}\,dt$ est égale à :
   a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) 1.
2) Soit f la fonction définie sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$ par $f(x)=\frac{1}{\tan x}$. Une primitive F de la fonction f sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$ est :
   a) $F(x)=\sin(\ln x)$ b) $F(x)=\ln(\sin x)$ c) $F(x)=\ln(\cos x)$.
3) $\int_{-3}^{3}(x^3\sin|x|)\,dx$ est égale à :
   a) 0 b) -1 c) 1.
4) $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est égale à :
   a) $+\infty$ b) 1 c) 0.
5) $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}\,dx$ est égale à :
   a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) $\frac{3}{8}$.
6) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.Soit A(-1,2,3) et B(1,4 ,0) ,le plan médiateur de [AB] a pour équation :
   a) 2x+2y-3z+14=0 b) $2x+2y-3z-\frac{3}{2}=0$ c) x+y-3z+11=0.
7) L'espace est rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
   Soit la sphère (S) :$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$ et le plan P : 2x-y-z =0.(S) et P sont :
   a) Tangents c) sécants c) disjoints.
8) L'ensemble des points M de l'espace tes que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ est :
   a) Une droite b) une sphère c) un plan.
9) Soit $C=\{M(x,y)\text{tel que } y=1-\tan x \text{ et } 0\leq x\leq\frac{\pi}{4}\}$ et S le solide obtenu par la rotation de C autour de l'axe (Ox).Le volume S est égal à :
   a) $\pi(1-\frac{\pi}{4})$ b) $\pi(1-\ln 2)$ c) $\pi(1+\ln 2)$.
10) La fonction $F: x\to\frac{2x}{1+x^2}$ est la primitive sur IR de la fonction f égale à :
   a) $\ln(1+x^2)$ b) $\ln(1-x^2)$ c) $\ln(1-2x^2)$.

Exercice n°2:

I/Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Calculer g(1).En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

II/ On considère la fonction $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$.

1) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.Unité graphique 1cm.
   a) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
   b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))$ et interpréter graphiquement le résultat.
2) a) Démontrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite D d'équation y=x-1.
   b)Tracer D et (C).
   c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite D , la courbe (C) et les droites d'équations respectives x =1 et x =e.

Exercice n°3 :

1) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + 2\ln x$.
   a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Calculer g et en déduire le signe de g(x).
2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
   Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   a) Montrer que f est continue et dérivable en 0.
   b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -xg(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
   d) Montrer que f(x)=0 admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α .Vérifier que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.
3) a) Ecrire une équation de la demi-tangente Δ à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à Δ.
   c) Tracer Δ et (C) .
4) Soit $\lambda \in]0,1[$.
   a) A l'aide d'une intégration par parties , calculer $\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, dx$.
   b) Calculer l'aire A_{λ} de la partie limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x= λ et x=1.
   c) Calculer $\lim_{x \to 0^+} A_{\lambda}$.

Exercice n°4 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur IN^* par $U_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $V_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+t^n} dt$.

1) a) Calculer U_1 et vérifier que pour tout $n \in IN^*$: $V_n + nU_n = n$.
   b) Montrer que pour tout $t \geq 0$ $1 - t^n \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$.
   c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$.
   d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.
2) a) En écrivant $\frac{nt^n}{1+t^n} = \frac{nt^{n-1}t}{1+t^n}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
   $V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$, $n \geq 2$.
   b) Montrer que pour tout $x \geq 0 : 0 \leq \ln(x+1) \leq x$ .En déduire que $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$.
   c) Calculer alors $\lim_{n \to +\infty} V_n$ et en déduire que $\lim_{n \to +\infty}[n(1-U_n)] = \ln 2$.

Exercice n°5 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.On donne les points A(1,-1,2) ; B(-1,-1,0) et C(1,1,0).
1) Montrer que les points A,B et C déterminent un plan P d'équation $x - y - z = 0$
2) Soit D(1,-3,0).
   a) Calculer le volume de tétraèdre ABCD.

b) Calculer l'aire du triangle ABD. En déduire la distance du point C au plan ABD.

3) Soit S :{ M(x,y,z) / $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$ }.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera les coordonnées de son centre I et son rayon R.

b) Vérifier que D$\in S$ puis écrire une équation de plan Q tangent à S en D.

c) Montrer que P coupe Q suivant une droite Δdont on donnera une représentation paramétrique.

4) a) Montrer que S et P se coupent suivant un cercle C dont on précisera les coordonnées de son centre Son rayon.

b)Montrer que C est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice n°6 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.Soit I=B*F et J tel que $\overrightarrow{EJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points I et J et du vecteur $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}$.

b) Montrer que l'aire du triangle AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis déduire la distance du point E au plan AIJ.

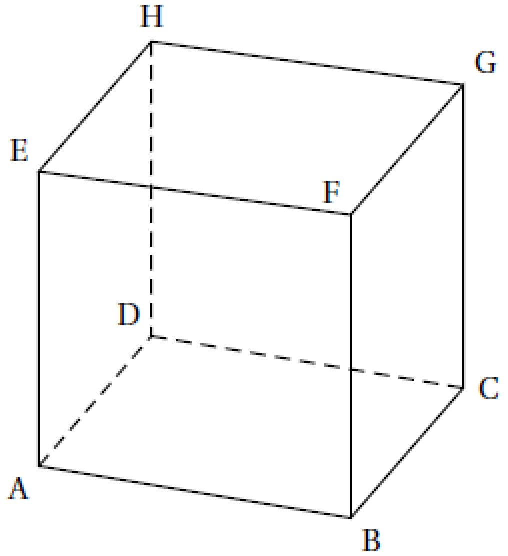
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x+3y-2z=0$ .Calculer la distance de E au plan AIJ.

4) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $x^2+y^2+z^2-2x-2z-2=0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que S et (AIJ) sont sécants suivants un cercle que l'on précisera.

5) Déterminer les plans qui sont parallèles au plan (AIJ) et tangents à S et déterminer les coordonnées de leurs points de contact.



Exercice n°7 :

Partie A

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\frac{6}{x}-6x^2$	‖	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3$.On désigne par g' la fonction dérivée de g .

1) Calculer $g'(x)$.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3) En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$et en 0.

2) On désigne par f 'la fonction dérivée de la fonction f .

a) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x^3}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

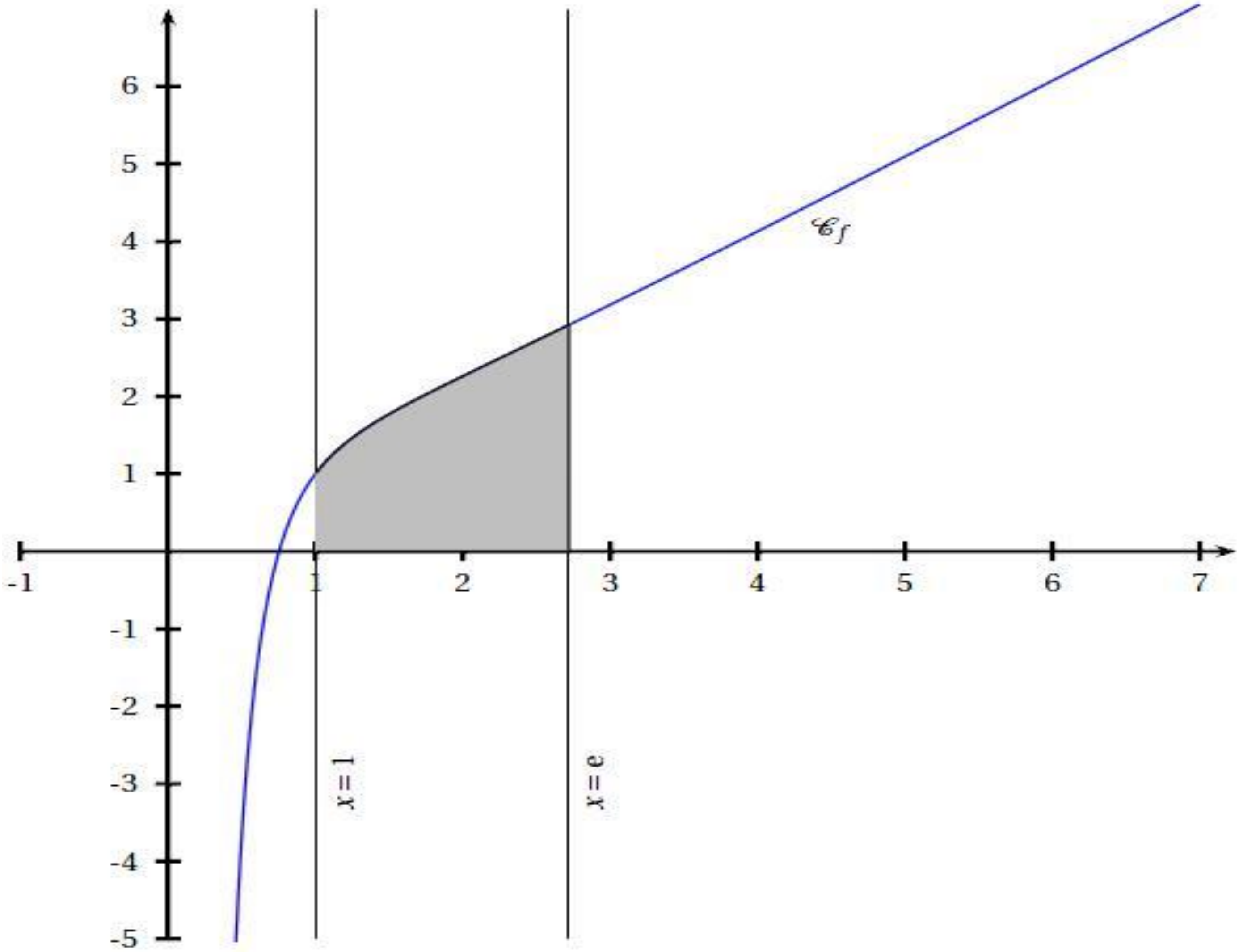
Partie B

1) On définit la fonction F sur I'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\times\frac{1+\ln x}{x}$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée C_f .

On a colorié le domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.



<u>Exercice n°8 :</u>

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0,+\infty[$ par : $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur par $]\,0,+\infty[$: $g(x) = x + 1 - \ln x$.

1) a) Calculer g'(x).

b) Dresser le tableau de variation de g.

2) Déterminer le signe de g(x) sur $]\,0,+\infty[$.

Partie B

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Calculer f '(x) pour tout $x \in]0,+\infty[$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Calculer f (1). En déduire le signe de f (x) sur $]0,+\infty[$.

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer (C) et (T) .

4) Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui prend la valeur -1 en 1 .

a) Montrer que $F(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de F sur $]0,+\infty[$.

Exercice n°9 :

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ $n \geq 1$.

1) Etablir que $1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$ pour tout $n \geq 1$.

2) Montrer que $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

3) En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°10 :

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = cosx$.

1) a) Calculer $f'(x)$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

b)Justifier que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f .

a) Justifier que g dérivable sur $[0,1[$.

b) Montrer que pour tout réel x de $[0,1[$; $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) a) Calculer $g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{6}$.