

N.B : La présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°01 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = i e^{i\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi[$

1/ a) Déterminer le module et un argument de $z = z_1 - z_2$

b) Déterminer θ pour que z soit réel.

2/ Soit le point I d'affixe $1+i$. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les trois points I, M_1 et M_2 soient alignés.

Exercice n°02 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

1/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : (E) : $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$; $\theta \in]0, \pi[$

On notera α et β les solutions de (E).

2/ On note A et B les points du plan complexe d'affixes respectives α et β

a) Placer A et B sur une figure en faisant apparaître θ comme la mesure principale d'un angle orienté.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de θ le triangle OAB est-il équilatéral ?

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ en fonction de θ .

b) Quelle est la partie réelle de $(1+\alpha)^n$?

4/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : (F) : $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2 \cos \theta$

Exercice n°03 :

Soit $f(x) = \frac{x - \sin x}{1+x^2}$

1/ Déterminer D_f (le domaine de définition de f).

2/a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{1+x^2}$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Interpréter graphiquement ces deux limites.

3/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]-1, 1[$

Exercice n°04 :

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1/ Déterminer D_g (le domaine de définition de g)

2/ a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq -\frac{1}{x}$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

c) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (ξ_g) au voisinage de $-\infty$.

3/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

4/ Trouver la nature de la branche infinie de (ξ_g) au voisinage de $+\infty$.