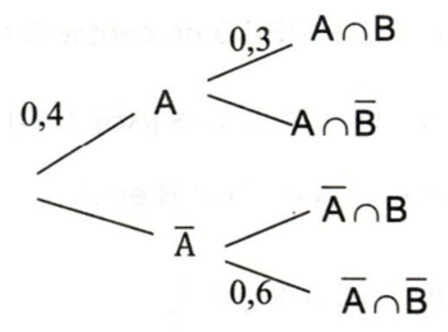
4 ème Sc.Exp 16/03/2023

# Devoir de synthèse N°2

Prof : Douma Ali ( Lycée : Ghraiba (Sfax 1 ) 3 H

## Exercice N° 1 (2 points)

Une expérience aléatoire est représenté par l'arbre de probabilité suivant :




Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes .

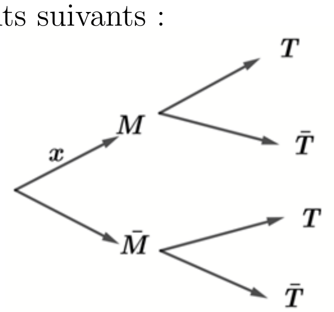
1. $p(\overline{A}) = 0,6$
2. La probabilité de $\overline{B}$ sachant $A$ est égale à $0,7$ .
3. $p(B) = 0,7$ .
4. $pA \cup B) = 0,64$

## Exercice N° 2 (6 points)

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus . Dans un grand centre vétérinaire ; on réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents . Ce test possède les caractéristiques suivantes :

★ Lorsque le chat est porteur de la maladie ,le test est positif dans 90% des cas .
★ Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie ,le test est négatif dans 85% des cas .
★ La probabilité que le test soit positif est égale à $0,45$ .

On choisit un chat au hasard dans le centre et on considère les événements suivants :
**M** ≪ Le chat est porteur de la maladie ≫ .
**T** ≪ Le test est positif ≫.
On note **x** la probabilité qu'un chat est porteur de la maladie .




1. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre .
   b) Calculer en fonction de $x$ les probabilité de $T \cap M$ et $T \cap \overline{M}$
2. a) Vérifier que $p(T) = 0,75x + 0,15$.
   b) En déduire la valeur de $x$ .
   c) On choisit au hasard un chat parmi ceux dont le test est négatif .Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie .
3. On choisit au hasard dans le centre un échantillon de 20 chats porteurs de la maladie .
   On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage successif et avec remise .
   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de chats ayant un test positif parmi les 20 chats malades .

a) Déterminer en justifiant , la loi de la variable aléatoire $X$ .

b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable $X$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice .

4) Dans cette question , on choisit un échantillon de $n$ chats porteurs de la maladie dans le centre on assimile encore le choix à un tirage successif et avec remise .
On note $p_n$ la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon .

a) Montrer que $p_n = 1 - (0,1)^n$

b) Déterminer la plus petite valeur de $n$ pour que $p_n \geqslant 0,99$

## Exercice N° 3 ( 5 points)

Soit la suite $(I_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ .

1) a) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante .

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ , $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$ . En déduire la limite de $(I_n)$.

2) Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

a) Montrer que pour tout réel $x$ , $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

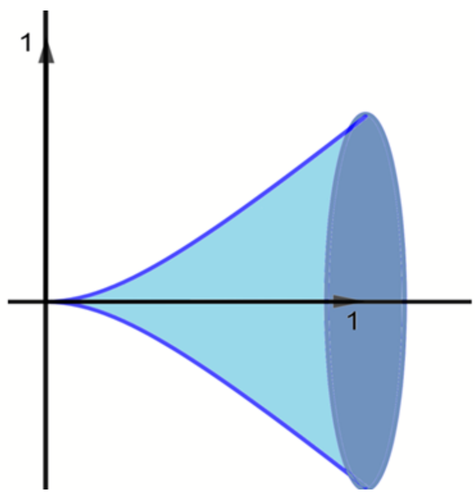
b) En déduire $I_0$ .

3) a) Montrer que $I_0 + I_1 = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ .

b) En déduire à l'aide d'une intégration par partie que : $2I_1 = \sqrt{2} - I_0$ .

c) En déduire $I_1$ .

4) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par $(C)$ la courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$ . On note $S$ le solide de révolution de $(C)$ autour de l'axe $(O, \vec{i})$. Calculer le volume de $S$ .



## Exercice N° 4 ( 7 points)

On donne dans l'annexe ci-jointe , la courbe $\Gamma$ de la fonction ln : $x \mapsto \ln x$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On considère la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} -x + 2x\ln x & ; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

.

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans le même repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et les points $A, B$ et $C$ de $(C_f)$ d'abscisses respectifs $e$ , $\sqrt{e}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ .

1. a) Calculer $f(e), f(\sqrt{e})$ et vérifier que $f(\dfrac{1}{\sqrt{e}}) = -\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

   b) Placer dans l'annexe les trois points $A, B$ et $C$ .

   c) Montrer que $f$ est continue en 0 .

   d) Étudier la dérivabilité de $f$ en 0 . Interpréter graphiquement les résultats

2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ , puis interpréter graphiquement le résultat .

3. a) Montrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$ , $f'(x) = 1 + 2\ln x$

   b) Recopier et compléter le tableau de variation de $f$ suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | | | | |

   c) Etudier la position relative de la courbe $(C_f)$ et la droite $(\Delta) : y = x$.

   d) Tracer dans l'annexe la courbe $(C_f)$ .

4. Soit $g$ , la restriction de la fonction $f$ sur $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$ et $(C_1)$ sa courbe représentative dans le même repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

   a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque sur un intervalle $J$ que l'on précisera .

   b) Tracer dans le même repère la courbe $(C_2)$ de $g^{-1}$.

5. On désigne par $A$ l'aire , en $(u.a)$ , de la partie $(E)$ du plan limitée par la courbe $(C_1)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \sqrt{e}$ et $x = e$ et par $A'$ l'aire , en $(u.a)$ , de la partie $(E')$ du plan limitée par les courbes $(C_1)$ , $(C_2)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ .

   a) Justifier que $A' = e^2 - 2A$ .

   b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} x\ln x dx = \frac{1}{4}e^2$

   c) En déduire la valeur de $A'$

## Anexxe à rendre avec votre copie

Nom et prénom ..................................                                   Classe ..............