Exercice 1 *(3 points)*

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposés est exacte. le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse. Aucune justification n'est demandé.

1. Pour tout réel a et b strictement positif on a : $\ln(ab) - \ln\left(a^2\right)$ est égale à :

   a) $\ln(a) - \ln(b)$ | b) $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ | c) $\ln(b-a)$

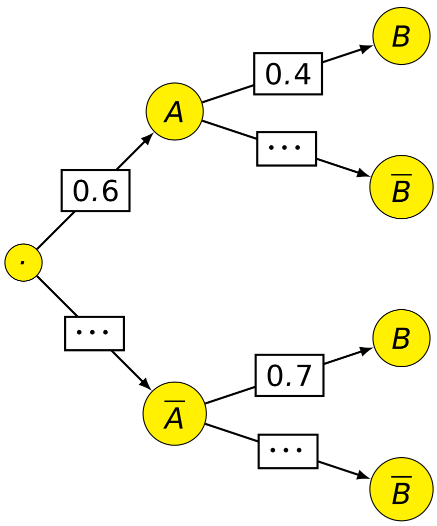
2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+\ln x}$ sa dérivé f' est :

   a) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$ | b) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ | c) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x(1+\ln x)^2}$

3. le réel $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$ est égal à :

   a) -1 | b) e | c) 1

4. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



   a) $p(B) = 0,36.$ | b) $p(B) = 0,4$ | c) $p(B) = 0,52$

Exercice 2 *(6 points)*

Un site internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères.
Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à la fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé. Sur ce site, une étude statistique a montré que

- $\dfrac{3}{5}$ des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final

- $\frac{1}{3}$ des annonces reçoivent une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet.

Les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente. On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :
L : l'évènement ń l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution ż; T : l'évènement ń l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours ż; A : l'évènement ń l'annonce ne reçoit aucune enchère ż. S : l'évènement ńle vendeur est satisfait du prix de vente final de son objet ż

1. a) Vérifier que $p(A) = \frac{1}{15}$
   b) Traduire la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final.
3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est $0,64$.
4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce
5. JOSEPH a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements de ces enchères sont indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, JOSEPH soit satisfait du prix de vente final d'au moins deux de ces jeux vidéo.

Exercice 3 *(4 points)*

Dans l'annexe ci jointe (FIGURE 1), on a tracé $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = ax + b(1+\ln x)$ où a et b sont deux réels donnés. On note g' la fonction dérivée de g.

- La courbe $\mathscr{C}_g$ passe par les point $A(1;-1)$, et B d'abscisse 2
- La courbe $\mathscr{C}_g$ coupe la droite D d'équation $y = x$ au point C d'abscisse $\frac{1}{e}$
- La courbe $\mathscr{C}_g$ admet l'axe des ordonné comme asymptote verticale
- La tangente T_B au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

1. a) Déterminer **en utilisant le graphique** : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $g'(2)$.
   b) calculer $g'(x)$ en fonction de a et b.
   c) En déduire que $a = 1$ et que $b = -2$.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x)$ puis interpreter graphiquement les résultats.
   b) Calculer l'aire du partie du plan limité par $\mathscr{C}_g$, les droites d'équation $y = x$, $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.
3. Soit h la restriction de g sur $[2,+\infty[$.

a) Vérifier que h réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) h^{-1} est-elle dérivable en $-\ln(4)$? justifier

c) Tracer $\mathscr{C}_{h^{-1}}$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 4 *(7 points)*

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases} x(\ln x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a) Vérifier que : $x>\dfrac{1}{e} \Longleftrightarrow \ln(x)+1>0$.

b) f est- elle dérivable à droite en 0 ? Interpreter graphiquement le résultat

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Étudier la branche infinie de la courbe $\mathscr{C}$ de f.

2) Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases} x(\ln x)^2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

Dans l'annexe ci jointe (FIGURE 2) on a tracé la courbe Γ de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Calculer $g(1)$ et $g(e)$, pus place le point $A(e,e)$.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

c) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

3) Soit $I=\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ et $J=\displaystyle\int_1^e g(x)dx$

a) Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}\ln(x)-\dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de f sur $[1,e]$.

b) Calculer l'intégrale I.

c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $J=\dfrac{e^2}{2}-\mathbf{I}$.

d) En déduire l'aire de la partie limitée par les deux courbe $\mathscr{C}$, Γ et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... classe : ....

Figure 1 :

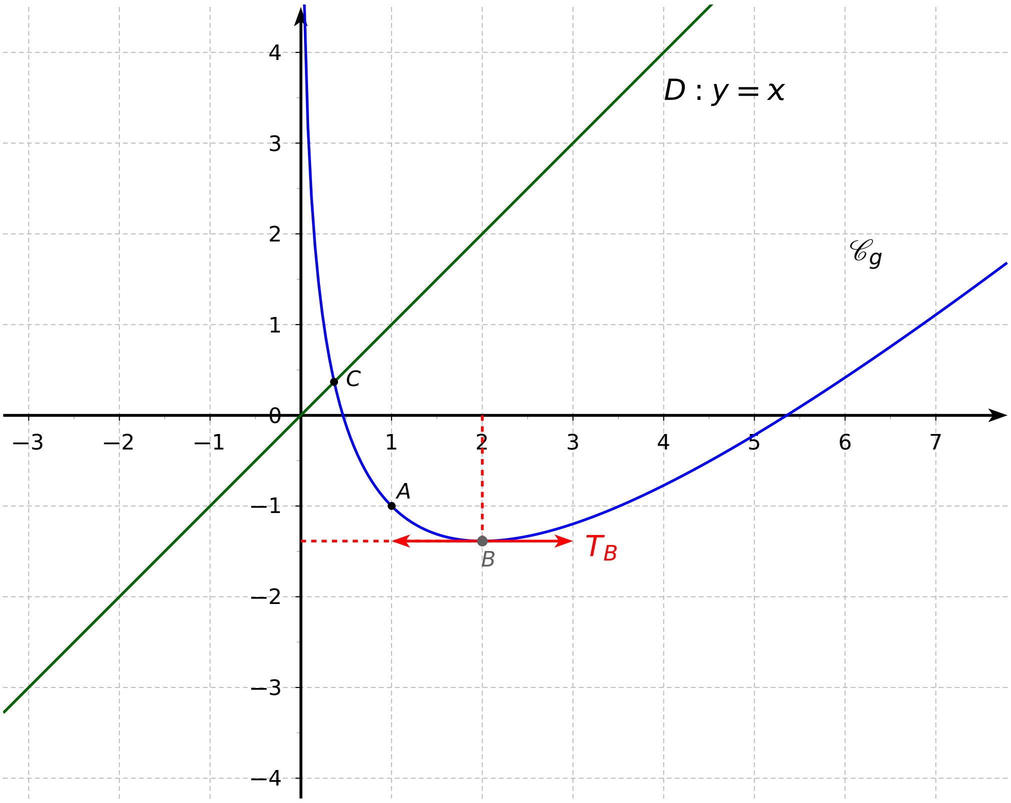


Figure 2 :