Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 2	4 Sc 3 & 4 Tec 3
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	13 - 12 - 2017

EXERCICE N : 1 (3 points)

A) Pour chacune des questions suivantes , indiquer la seule proposition correcte **en justifiant la réponse** .

1) Les racines cinquièmes de (32 i) sont :

a) $\begin{cases} Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ k \in \{-2,-1,0,1\} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ k \in \{-2,-1,0,1,2\} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)} \\ k \in \{-2,-1,0,1,2\} \end{cases}$

2) Z_1 et Z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 + (1-3i)Z + 2i - 2 = 0$ alors :

a) $\arg(Z_1) + \arg(Z_2) \equiv \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ **b)** $|Z_1 Z_2| = \sqrt{2}$ **c)** $\arg(Z_1 Z_2) \equiv -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

3) f est une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que : $3 \leq f'(x) \leq 5$ pour tout $x \in [-1, 2]$ alors :

a) $3 \leq f(2) - f(-1) \leq 5$ **b)** $3 \leq f(2) - f(-1) \leq 15$ **c)** $9 \leq f(2) - f(-1) \leq 10$

EXERCICE N : 2 (7 points)

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ + c$ où a , b et c sont **des réels** .

1) Montrer que si : $f(2) = 0$ et $f(1-i) = 0$ alors on a : $\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ b + c = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$

2) Déterminer alors les valeurs de a , b et c .

B) Dans la suite on prend : $f(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4$.

1) Vérifier que pour tout nombre complexe Z , on a : $f(Z) = (Z-2)(Z^2 - 2Z + 2)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(Z) = 0$.

3) Résoudre dans **IR** l'équation : **(E)** $Z^9 - 4Z^6 + 6Z^3 - 4 = 0$.

C) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les point A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2$ et $Z_B = 1 - i$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle .

2) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses .

a) Déterminer alors Z_C l'affixe du point C .

b) Montrer que OBAC est un carré .

EXERCICE N : 3 (10 points)

A) *Soit la fonction* f *définie sur* $]\,1\,,\,2\,]$ *par :* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$.

On désigne par ***(C f)*** *la courbe représentative de* f *dans le repère orthonormé* $\mathbf{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) *Etudier la dérivabilité de* f *à gauche de 2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu .*

b) *Montrer que f est dérivable sur* $]\,1\,,\,2\,[$ *et prouver que pour tout* $x \in \,]\,1\,,\,2\,[\,;\; f'(x) < 0$.

2) a) *Dresser le tableau de variations de* f .

b) *Montrer que* f *réalise une bijection de* $]\,1\,,\,2\,]$ *sur un intervalle* J *que l'on précisera .*

c) *Montrer que pour tout* $x \in J\;;\quad f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3) *Montrer que l'équation :* $f(x) = x$ *admet dans* $]\,1\,,\,2\,]$ *une unique solution* α .

4) *Tracer dans l'annexe ci-jointe* $\boldsymbol{(C_{f^{-1}})}$ *.(Préciser la demi-tangente au point d'abscisse 0) .*

B) *Soit la suite* (U_n) *définie par :* $U_0 = 1$ *et* $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ *pour tout* $n \in IN$.

1) a) *Représenter sur l'axe* $(O, \vec{i})$ *les termes* U_0, U_1 *et* U_2 .

b) *Quel conjecture , sur la monotonie et la convergence de* (U_n) *, peut-on faire ?*

2) *Montrer que pour tout* $n \in IN\;;\quad 1 \le U_n \le 2$.

3) *Montrer que pour tout* $x \in [\,1\,,\,2\,]\;;\; |\,(f^{-1})'(x)\,| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4) a) *Montrer que pour tout* $n \in IN\;;\quad |\,U_{n+1} - \alpha\,| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\,U_n - \alpha\,|$.

b) *Déduire que pour tout* $n \in IN\;;\; |\,U_n - \alpha\,| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |\,1 - \alpha\,|$.

c) *En déduire que la suite* (U_n) *est convergente et déterminer sa limite .*

Bonne chance

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie