



LYCÉE OUED ELLIL



DEVOIR DE CONTRÔLE N° 2

MATHÉMATIQUES

CLASSES : 4^{IEME} ANNÉE SECONDAIRE

SECTION : SCIENCES EXPÉRIMENTALES

DURÉE : 2 HEURES

PROF : BELLASSOUED MOHAMED

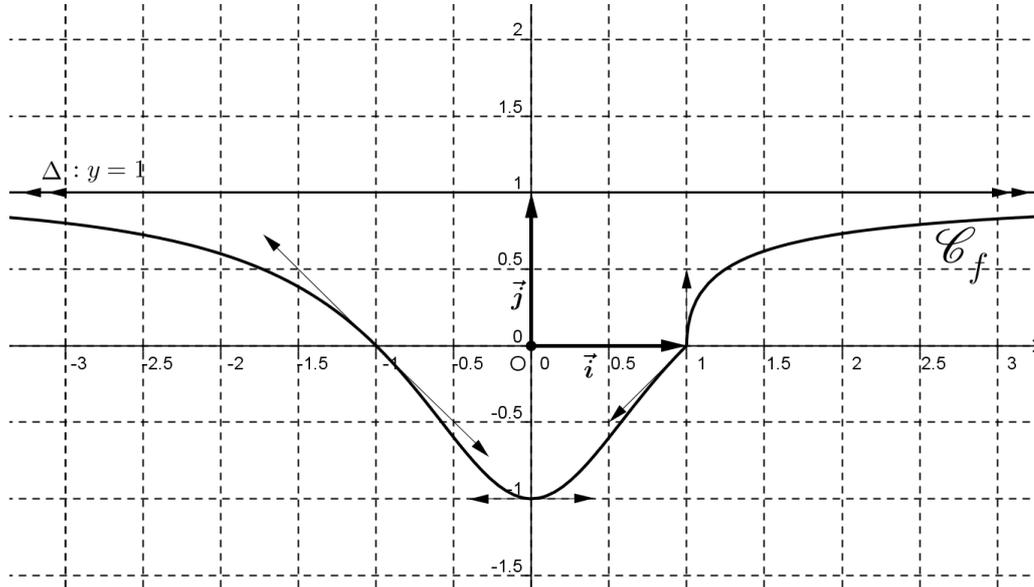


ANNÉE SCOLAIRE : 2017-2018



EXERCICE 1: 4.5 POINTS

- \mathcal{C}_f est la courbe représentative d'une fonction définie sur \mathbb{R}
- La droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
- \mathcal{C}_f Possède deux tangentes aux points d'abscisses -1 et 0 et deux demi-tangentes au point d'abscisse 1



On utilisant le graphique répondre aux questions suivantes :

1-Déterminer $f'(0)$ et $f'(-1)$

0.5

2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x)}{x-1} \right)$ • $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x)}{x-1} \right)$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)-1} \right)$

1

3-Montrer que la fonction $g = f \circ f$ est dérivable en 0 puis calculer $g'(0)$

0.75

4- Soit la fonction h restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$

a- Montrer que h est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera .

0.5

b-On note h^{-1} la fonction réciproque de h . sur quelles intervalles h^{-1} est elle dérivable ?

0.75

c-Tacer sur la feuille annexe la courbe de h^{-1} (en précisant les demi-tangentes)

1

EXERCICE 3: 4 POINTS

On considère les suite (U_n) et (V_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1-On considère la suite (W_n) définie sur \mathbb{N} par $W_n = U_n - V_n$

a- Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$

0.5

b-Exprimer (W_n) en fonction de n . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \geq V_n$

0.75

2- Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes .Que peut-on déduire ?

1.5

3-On considère la suite (T_n) définie sur \mathbb{N} par $T_n = 3U_n + 8V_n$

a-Montrer que la suite (T_n) est constante et donner sa valeur .

0.5

b-On déduire la limite commune des deux suites (U_n) et (V_n)

0.75

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

On désigne par Γ la courbe représentative de f

1-a- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$

1

b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

1

c- Dresser le tableau de variations de f

0.25

d- Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe Γ au point $I(1,0)$

0.5

2-a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0.5

Indication : $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$

b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x-1|$

1

c- Montrer alors que point $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe Γ

0.75

3-a- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$. On note f^{-1} fonction réciproque de f

0.25

b- Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$ puis Préciser $(f^{-1})'(0)$

0.75

4- Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$ on a : $f^{-1}(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

1

EXERCICE 4: 5 POINTS

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$

1-a- Dresser le tableau de variation de f

1

b- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$

0.5

2- On considère dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation (E) : $4z^3 + z^2 + z - 3 = 0$

0.5

Montrer que si z est une solution de (E), alors \bar{z} est aussi solution de (E)

3- Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a- Donner l'écriture exponentielle de j

0.25

b- Vérifier que $j^3 = 1$ et $j^2 = \bar{j}$

0.5

4-a- Vérifier que j est une solution de l'équation (E) puis résoudre cette équation

1

b- En déduire la valeur de α définie à la question 1/b

0.25

5- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E') : $4z^6 + z^4 + z^2 - 3 = 0$

1

