Exercice n°1: (7 points)

1) soit l'équation (E): $z^2 - \sqrt{2}z + 1 - i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Déduire la deuxième solution de (E).

2) Le plan est munie d'un repère orthonormé directe ($(O,\vec{u},\vec{v})$ .On considère les points A ,B ,C et D d'affixes respectifs $Z_A = -i$, $Z_B = \sqrt{2} + i$, $Z_C = 1 + i\sqrt{2}$ $et\ Z_D = Z_B + Z_C$.

Soit (ς) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ construit dans l'annexe ci joint.

a) Vérifier que les points B et C appartient au cercle (ς).

b) Construire les points B et C.

c) Montrer que OBDC est un losange puis construire le point D.

d) Montrer que $Z_D = \left(1 + \sqrt{2}\right)(1 + i) = (2 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) Soit(C') le cercle de centre O et de rayon $(2 + \sqrt{2})$ et soit H le point de (C') et tel que ODH est un triangle équilatéral direct.

a) Construire le cercle (C') et le point H.

b) Montre que $Z_H = \left(2 + \sqrt{2}\right)e^{i\frac{7\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_D$

c)Déduire $cos\,\frac{7\pi}{12}$.

Exercice n°2: (7 points)

Soit la fonction définie sur]0, +∞ [par f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

1) a) Montrer que pour tout x $\in$]0, +∞ [on a : f'(x) = $\dfrac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Donner une équation de la tangente T à la courbe de f au point A d'abscisse 1.

b) Déterminer les coordonnés du point d'intersection de la courbe de f et la tangente T,

2)a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α puis vérifier que $1 \prec \alpha \prec 2$.

b) Montrer que : f'(∝) $= \frac{-1}{\propto^4}$

3) Montrer que pour tout x ≥ 1 on a : $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4) Soit la suite définie sur IN par U_0 =1 et U_{n+1} = f (U_n).

a) Déduire que pour tout n $\in$ IN : $U_n \geq 1$.

b) Monter que pour tout n $\in$ IN : $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|U_n - \alpha\right|$

c) En déduire que : $\left|U_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

d) Déduire la limite de la suite U.

Exercice n°3: (6 points)

Soit la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$ $on\ a\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit la fonction g définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par g(x) =$f\left(\frac{1}{sinx}\right)$

a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que g'(x) = $\frac{-1}{sin^2 x}$

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Vérifier que pour tout x ∈ $]0,\frac{\pi}{2}]$ on a g(x) =$\frac{cosx}{sinx}$.

Bon travail