DEVOIR DE CONTROLE N°3

PROF : **MOHAMED BENZINA** LYCEE PILOTE MONASTIR 2012/2013

MATHEMATIQUES 2sc

EXERCICE N° 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Reprsenter graphiquement les premiers termes de u_n. Quelles conjectures émettez-vous ?
4. On admet que, pour tout n, u_n n'est pas nul. On pose $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$.

a. Calculer v_0, v_1, et v_2.
b. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique.
c. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

Suites arithmétiques - 1

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique. On sait que $u_5 = 125$ et $u_{16} = 48$. Calculer la raison et le premier terme de cette suite.
2. En déduire u_n en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -127$?
4. A partir de quel rang a-t-on $u_n \leq -250$?
5. Calculer la somme $S = u_{1789} + u_{1790} + ... + u_{2007}$.

Suites arithmétiques - 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$.

1. Calculer u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = n\,u_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de (v_n).
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée.

EXERCICE N°2

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-U_n^2}} \end{cases}$

1) a- Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $0 \leq U_n < \sqrt{2}$.
   b- Montrer que la suite (U_n) est croissante.
   c- En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n^2}{2-U_n^2}$.
   a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b- Exprimer V_n et U_n en fonction de n.

c- Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3) Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{U_k^2}$

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $S_n = \frac{n(n+3)}{4}$.

b- Déterminer alors la limite de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N° 3 : (5 points).

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4+U_n}{5-U_n} & , n \geq 0 \end{cases}$

1) a- Montrer que pour tout entier naturel n, $-1 \leq U_n < 2$.

b- Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{1+U_n}{2-U_n}$, $n \geq 0$.

a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b- Exprimer V_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

3) a- Exprimer U_n en fonction de n.

b- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. (Que peut on conclure ?).

EXERCICE N°2

Soit un triangle ABC et E un point du coté [BC] distinct de B et C

1) Construire les points $F = t_{\overrightarrow{BA}}(E)$ et $G = t_{\overrightarrow{BC}}(E)$
2) Montrer que $G = t_{\overrightarrow{AC}}(F)$ et que $t_{\overrightarrow{BE}}\big((AC)\big) = (FG)$
3) Les droites (AC) et (EF) se coupent en un point K. La parallèle menée par K à la droite (BC) coupe (AB) en M et (FG) en N. Montrer que K est le milieu du segment [MN]

EXERCICE N°2

Soient deux cercles C et C’ sécants en A et B, de meme rayon et de centres respectifs O et O’

1) Soit $A' = t_{\overrightarrow{OO'}}(A)$. Montrer que les points B ,O’ et A’ sont alignés
2) La droite D passant par A’ et parallèle à (AB) recoupe le cercle C’ en B’
   Montrer que $B' = t_{\overrightarrow{OO'}}(B)$
3) La droite (AO) recoupe C en E.Montrer que $B' = t_{\overrightarrow{2OO'}}(E)$
4) Une droite passant par A et distincte de (AO) recoupe C en C et C’ en C’
   Montrer que $t_{\overrightarrow{2OO'}}\big((EC)\big) = (B'C')$