Devoir de synthèse N°1		Classe : 4 Math
Prof : Aoiaiti Mohamed	Date : 05/03/2019	Durée : 4H

(Le sujet comporte 5 page numérotées de 1/5 à 5/5)

Exercice 1 (5 pts)

On muni le plan du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.On donne les points B(2;0) et C(0;3)

(Voir Annexe)

On considère la similitude directe f qui envoie B en O et O en C .

1. Déterminer le rapport et l'angle de f.
2. On désigne par H le centre de f.
   a) Montrer que H appartient au cercle de diamètre [OB].
   b) Déterminer $fof(B)$. En déduire que H appartient à la droite (BC) puis construire H.
3. Montrer que la forme complexe de f est $z' = -\frac{3}{2}iz + 3i$ avec z l'affixe d'un point M et z' l'affixe d'un point M' l'image de M par f.
4. On considère la parabole P d'équation $P: y^2 - 4y - 2x = 0$
   a) Déterminer les coordonnées de son foyer F et l'équation de sa directrice (D) .
   b) Vérifier que O appartient à P et donner une équation de la tangente T à Pen O.
   c) Construire T et P dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

5) déterminer une équation de P' l'image de P par f.

Exercice 2 (4 pts)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier non nul n par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, u_n est pair.
2) Montrer que , pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
3) Soit p un nombre premiers strictement supérieur a 3.
   a) Montrer que $6\times 2^{p-2} \equiv 3(mod p)$ et $6\times 3^{p-2} \equiv 2(mod p)$
   b) En déduire que $6\times u_{p-2} \equiv 0(mod p)$
   c) Montrer alors que p divise u_{p-2}.
4) On considère le nombre $N = 499^{69} + 27^{23} + 6^{69} - 4$

Déterminer le reste de N modulo 71.

Exercice 3 (4 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathrm{U_n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t^n}}$ et $\mathrm{V_n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{nt^n}}{1+\mathrm{t^n}}\mathrm{dt}$.

1.a) Calculer U_1 et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n + nU_n = n$.

b) Montrer que pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$: $1 - t^n \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$.

c) En déduire que pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$: $1 - \frac{1}{1+n} \leq \mathrm{U_n} \leq 1$ et calculer la limite de $(\mathrm{U_n})$.

2.a) En utilisant une intégration par parties, Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{V_n} = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+\mathrm{t^n})\mathrm{dt}$$

b) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$: $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n)dt \leq \frac{1}{n+1}$.

d) Calculer la limite de la suite (V_n) et En déduire que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n(1-U_n) = ln2$.

Exercice 4 (7 pts)

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que pour tout réel x non nul, $\frac{e^x-1}{x} > 0$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \mathrm{f(x)} = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout x réel non nul, $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x-1)}$.

b) Les courbes (C_1) et (C_2) sur **l'annexe (page 4/5)** représente les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ Par $g(x) = xe^x$ et $h(x) = e^x - 1$.

*Identifier la représentation graphique de chacune des fonctions g et h.

*Donner graphiquement le signe de $g(x) - h(x)$

*En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x non nul.

c) Vérifie que, pour tout réel x,$f(x) - x = f(-x)$.

*En déduire que $f'(0) = \frac{1}{2}$

** Déduire aussi le singe de $f(x) - x$ pour x de $]0,+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

e) Tracer (C_f) (**sur l'annexe page 5**)

4) On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 > 0$

et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout entier n, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est converge et préciser sa limite.

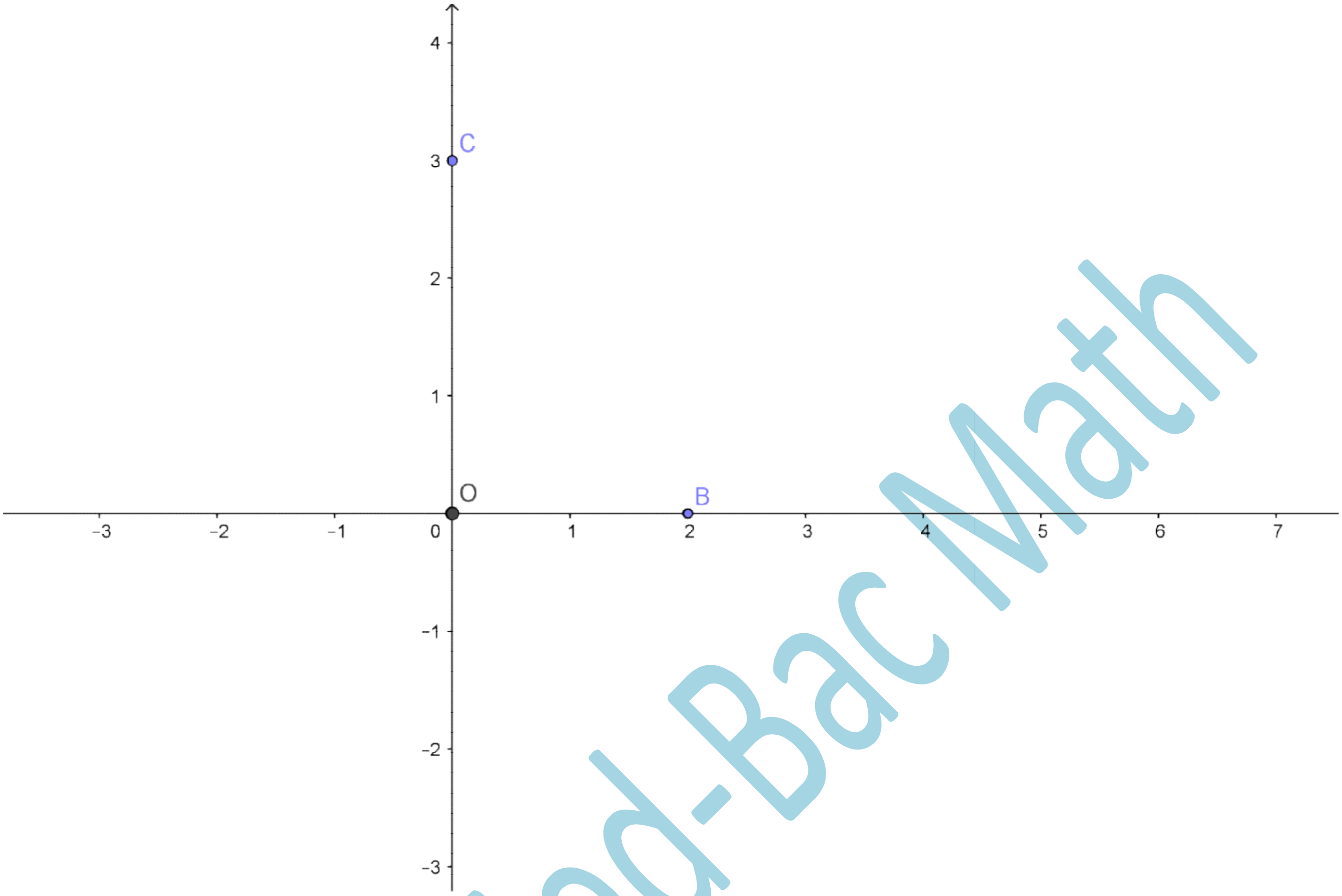
5) On pose pour tout entier naturel n, V_n La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, U_n]$

Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq V_n \leq U_n$.

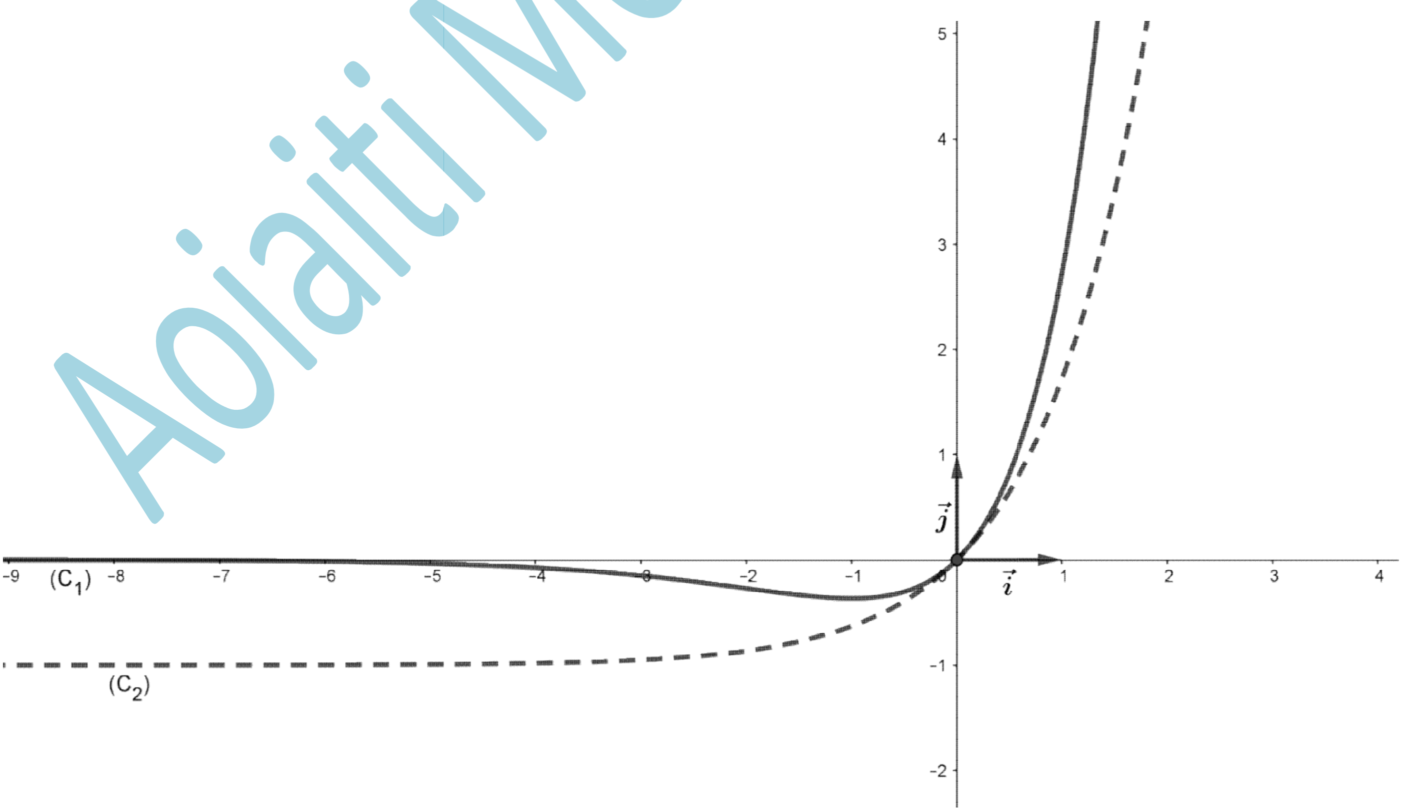
En déduire la limite de (V_n)

Annexe

Exercice 1



Exercice 4



Exercice 4