LYCEE NAHJ EL MENZEH Beni kalled	DEVOIR DE SYNTHESE N° 1	PR: KADDOUR ABDELHAMID 4è MATH

EXERCICE N° 1(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte

Indiquer la réponse exacte (sans justification)

1) Soit $\theta \in$ IR le module du nombre complexe z = $1 + e^{i\theta}$ est

a) $1 + |e^{i\theta}|$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2(1 + cos\theta)}$

2) Sachant que $\theta \in]\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}[$, alors un argument de z = i cosθ

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} + \theta$

3)

EXERCICE N° 2 (4points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l' équation (E) : $2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i) z + 1 + \sqrt{3} i) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') : $2z^8 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i) z^4 + 1 + \sqrt{3} i) = 0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , On considère les points A et B d'affixe respectives $z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = i\, z_A$. Soit I le milieu de [AB]

a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B

b) Placer les points A, B , et I dans le repère (O , $\vec{u}$, v)

4) a) Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle et isocèle

b) En déduire que OI = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $(\vec{u} , \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de cos $\frac{7\pi}{12}$ $et\ sin\ \frac{7\pi}{12}$

EXERCICE N° 3 (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct . Soit ABCD un losange direct de centre O

I est le milieu du segment [AB] . J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B

b) Caractériser f

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f

2) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble { A,B,D} en l'ensemble {B,C,D}

et tel que g(A) = C

a) Déterminer l'image du segment [BD] par g

b) En déduire que g est la symétrie orthogonale d'axe (BD)

3) Soit φ un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A,B,D} en l'ensemble {B,C,D}

et tel que $\varphi(A) = D$

a) Montrer que $\varphi(D) = B$

b) Caractériser φ

EXERCICE N° 4 (4points)

Soit f la fonction sur IR par f(x) = $\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$, On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que f '(x) = $\frac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que le point I (0, 1) est un centrer de symétrie de (C)

b) Ecrire l'équation de la tangente T à (C) en I

c) Tracer T et (C)

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur]0,2[

b) Montrer que pour tout x €]0 , 2[$f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{2x-x^2}$

c) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère

EXERCICE N° 5 (4points)

Soit f la fonction définie sur]-1 , 1 [par f(x) = -1 + cotg $\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de]-1 , 1[sur IR

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi[(x+1)^2+1]}$

2) Soit F la fonction définie sur IR^* par $F(x) = f^{-1}(x-1) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$

a) Montrer que F est dérivable sur IR^* et calculer F '(x)

b) En déduire que pour tout x € IR_+^* , F(x) = -1 et pour tout x € IR_-^* ; F(x) = 1

3) Pour tout n € IN^* on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(\frac{-1}{k}\right)\right)$

a) Montrer que $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + f^{-1}\left(\frac{-1}{k+1}\right) = -1$

b) Montrer que $u_n = -n - f^{-1}\left(\frac{-1}{n+1}\right)$ puis calculer $\lim_{+\infty} u_n$