



# DEVOIR DE SYNTHESE N°1 DE MATHÉMATIQUES



- ❖ Niveau : 4<sup>eme</sup> Maths
- ❖ Profs : TAREK MEDDEB & AMOR SAIDI
- ❖ Durée : 3 heures
- ❖ Date : 24 / 12 / 2016



## Thèmes traités :

- ❖ Complexe - fonctions et fonctions réciproques - Suites
- ❖ Déplacements et antidéplacements

- L'attention des élèves est attiré sur le fait que la qualité de la rédaction ,l'écriture lisible , le soin apporté à la copie , la clarté et la précision des raisonnements entrent pour part importante dans l'appréciation des copies
- L'épreuve comporte 4 pages numérotés de 1/4 à 4/4





### EXERCICE N°1 (3 pts)

Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :  $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$ .

- 1) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha_n \in ]0 ; 1[$  tel que  $f_n'(\alpha_n) = 0$ .
- 2) Exprimer  $\sin(\pi\alpha_n)$  en fonction de  $\alpha_n$ , de  $n$  et de  $\cos(\pi\alpha_n)$ .

En déduire que :  $f_n(\alpha_n) = -\frac{\pi\alpha_n^{n+1}}{n} \cos(\pi\alpha_n)$ .

- 3) Montrer que :  $|f_n(\alpha_n)| < \frac{\pi}{n}$ , en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n)$ .

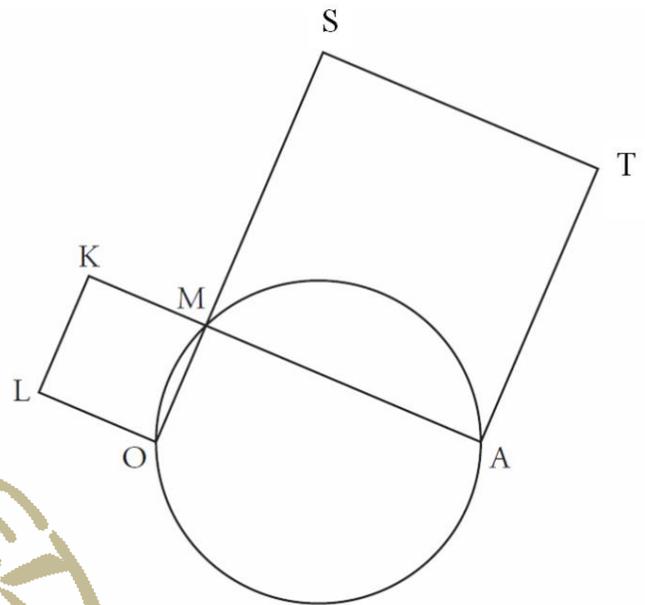


### EXERCICE N°2 (4,5 pts)

Dans le plan orienté, on considère les points  $O$  et  $A$  fixés et distincts,  $I$  est le milieu de  $[OA]$ ,  $\mathcal{C}$  est le cercle de diamètre  $[OA]$ , un point  $M$  variable sur le cercle  $\mathcal{C}$ , et distinct de  $O$  et  $A$ , ainsi que les carrés de sens direct  $ATSM$  et  $MKLO$ .

On munit le plan d'un repère orthonormé direct de sorte que les affixes des points  $O$  et  $A$  soient respectivement  $0$  et  $1$ .

On note  $m, t, s, k$  et  $l$  les affixes respectives des points  $M, T, S, K$  et  $L$ .



- 1) Démontrer que, quel que soit le point  $M$  choisi sur le cercle  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

- 2) Etablir les relations suivantes :  $l = im$  et  $t = -im + 1 + i$ .

Montrer ensuite que :  $s = (1-i)m + i$  et  $k = (1+i)m$ .

- 3) a/ Démontrer que le milieu  $\Omega$  du segment  $[TL]$  est un point indépendant de la position de  $M$  sur le cercle  $\mathcal{C}$ .

b/ Démontrer que  $\Omega$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .

- 4) a/ Calculer la distance  $KS$  et démontrer que cette distance est constante.

b/ Montrer que le triangle  $\Omega KS$  est rectangle et isocèle en  $\Omega$ .

- 5) Démontrer que le point  $S$  appartient à un cercle fixe dont on déterminera le centre et le rayon.





### EXERCICE N°3 (6,5 pts)

**A/** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}$ .

On désigne par  $\xi_f$  La courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a/ Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement les résultats.

b/ Dresser le tableau de variations de  $f$ .

2) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

3) a/ Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $\xi_f$  au point d'abscisse 0.

b/ Etudier la position relative de  $\xi_f$  et  $T$  (on pourra distinguer les cas  $x < 0$  et  $x \geq 0$ ).

c/ Tracer dans le même repère  $\xi_f$  et  $\xi_{f^{-1}}$ .

4) Expliciter  $f^{-1}(x)$ .

5) On considère la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = \frac{1}{4}$  et  $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ .

a/ Montrer que la suite  $U$  est croissante.

b/ Montrer que la suite  $U$  est non majorée. (on pourra raisonner par l'absurde).

c/ En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

**B/** On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f(\tan x)} & \text{si } x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

1) a/ Montrer que  $g$  est continue à gauche en  $\frac{\pi}{2}$ .

b/ Montrer que, pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  on a :  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}$ .

2) a/ Dresser le tableau de variations de  $g$ .

b/ Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.

c/ Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $]2, +\infty[$  et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-2x}}$ .



## EXERCICE N°4 ( 6 pts )

Le plan orienté dans le sens direct.

On considère un rectangle ABCD tel que  $AB = 2AD$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On désigne par I , J et  $\Omega$  les milieux respectifs de  $[AB]$ ,  $[DC]$  et  $[JB]$  .

1) a/ Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que  $R(B) = A$  et  $R(C) = I$ .

b/ Caractériser R.

2) Soit l'application  $f = t_{\overline{JB}} \circ R$ .

a/ Déterminer la droite  $\Delta$  tel que  $t_{\overline{JB}} = S_{(\Delta)} \circ S_{\Delta}$ .

b/ En décomposant convenablement R, montrer que f est la rotation de centre I et

d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

3) Soit  $g = f \circ S_{(DC)}$

a/ Déterminer  $g(D)$  et  $g(J)$

b/ En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

4) Soit  $h = S_{(AJ)} \circ g^{-1}$ .

Déterminer  $h(B)$  et  $h(C)$  puis caractériser h.

5) Soit M un point du plan et  $M_1$  et  $M_2$  les points tel que  $g(M) = M_1$  et  $t_{\overline{JB}}(M) = M_2$  .

Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

6) On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$  et soit  $\varphi$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = -i\bar{z} + 3 + i$$

a/ Montrer que  $\varphi$  est une isométrie.

b/ Montrer que  $\varphi$  est sans points fixes et en déduire la nature de  $\varphi$ .

c/ Montrer que  $\varphi \circ \varphi = t_{\overline{2JB}}$  , puis prouver que  $\varphi = g$ .



BON TRAVAIL