Epreuve : Mathématiques Durée : 3 heures	Lycée de Sbeïtla Devoir de synthèse N°1 Classe : $4^{ème}$ Maths Année scolaire : 2015 // 2016	Professeur : Elabidi Zahi

Exercice 01 : (2points)

On donne ci-dessous la représentation graphique (ζ), dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

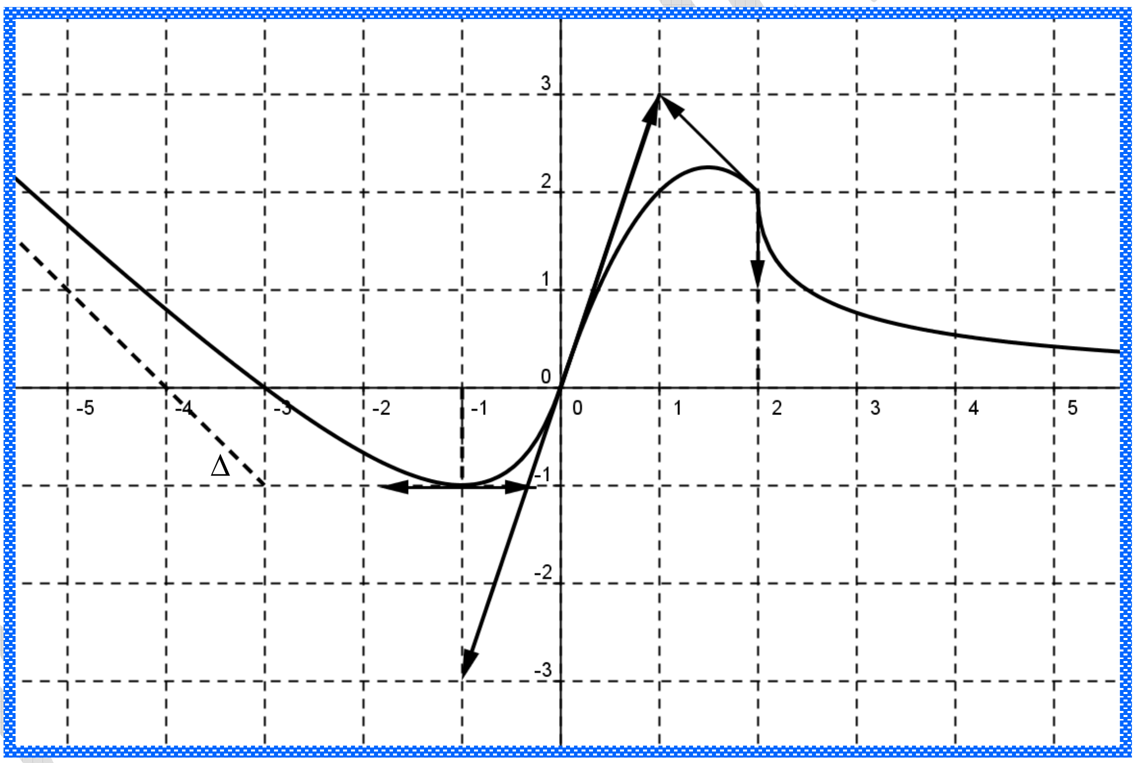
- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $+\infty$
- La droite Δ d'équation $y = -x - 4$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $-\infty$

A l'aide d'une lecture graphique et avec justification :

a) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\ ,\ \lim_{x\to2^+} \frac{f(x)-2}{x-2} \text{ et } \lim_{x\to2^-} \frac{f(x)-2}{4-2x}$$

b) Déterminer : $f'(-1)$, $f'(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f\circ f(x)}{f(x)}$



Exercice 02 : (8points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\forall x \geq 0$, $f'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ et que $\frac{3}{2}<\alpha<2$

c) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative (ζ) de f

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que $\forall x\in J$, $f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

c) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative (ζ') de f^{-1}

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n), \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\le u_n\le 2$

b) Montrer que pour tout x de $[1;2]$, $|f'(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$

d) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=1+\cos x$

c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1;2]$

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1;2[$ et que pour tout $x\in[1;2[$, $(g^{-1})'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

Exercice 03 : (5points)

Soit ABC un triangle isocèle est rectangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par O le milieu de $[AC]$ et par D son symétrique par rapport à (BC)

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et O sur D

b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2) Soit I le milieu de $[OB]$ et J le point d'intersection des droites (AD) et (BC)

On pose $K=f(I)$.

Montrer que K est le milieu de $[BD]$.En déduire que les points O, J et K sont alignés

3) Soit $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$

a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$

b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$

4) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$ et on désigne par Δ la médiatrice de $[BD]$

a) Montrer que h est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{BO}$

b) Déterminer l'ensemble des point M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$

c) Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$

Exercice 04 : (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Pour tout réel θ de $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_\theta) : z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

2) On désigne par A, M et M' les points d'affixes respectives i , $z = i + e^{i\theta}$ et $z' = i + e^{-i\theta}$

a) Déterminer les ensembles décrits par M et M' lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

b) On note I le milieu de $[MM']$

Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

3) a) Montrer que pour tout réel x on a : $i + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

b) Mettre alors z et z' sous forme exponentielle

4) a) Montrer que AMM' est un triangle isocèle en A

b) Déterminer θ pour que le triangle AMM' soit équilatéral