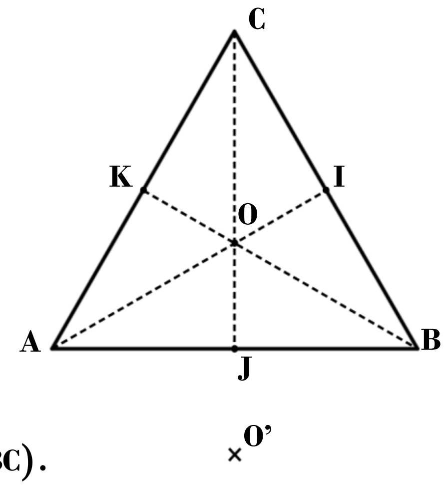
LYCEE IBN-ALHAITHEM BEN GARDENE	PROF : NOBBIGH Dhaou

	DEVOIR DE SYNTHESE N°01	

MATHEMATIQUES	4ème MATHS 1	A S : 2015-2016 *** DUREE : 3heures

Le sujet comporte 4 pages

EXERCICE 1 — 5 points



Dans la figure ci-contre :

- ABC est un triangle équilatéral de centre O, tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.
- $O' = S_{(AB)}(O)$.

1) Montrer que BOAO' est un losange de centre J et que $(BO') \perp (BC)$.
2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement φ vérifiant $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O') = O$.
   b) Préciser l'angle de φ. En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre.
3) Soit $g = t_{\overrightarrow{CB}} \circ \varphi$.
   a) Vérifier que $\varphi = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$.
   b) En déduire que g est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.
4) Soit ψ l'antidéplacement tel que $\psi(B) = C$ et $\psi(O') = O$
   a) Monter que ψ est une symétrie glissante d'axe (IJ).
   b) Déterminer $S_{(IJ)}(B)$. En déduire le vecteur de $\vec{u}$ de ψ.
5) Soit Ω l'intersection de (BK) et (IJ). On pose $h = S_{\Omega} \circ \psi$
   a) Déterminer $h(J)$. En déduire que h est une symétrie orthogonale.
   b) Vérifier que $S_{\Omega} = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)}$. En déduire que : $h = S_{(BK)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$
   c) Déterminer l'axe de h.

EXERCICE 2 — 3 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$. On appelle g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

1) Montrer que g est une isométrie.
2) a) Montrer que g n'admet pas des points fixes.
   b) En déduire que g est une symétrie glissante.
3) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 1 + 2i$ et $z_D = 2 + 2i$
   a) Déterminer $g(A)$ et $(g \circ g)(O)$.
   b) Caractériser alors g.

EXERCICE 3 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0,2[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{2-x}$.

On désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Monter que f est dérivable sur $]0,2[$ et que pour tout $x\in]0,2[$, on a :

$f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{2x-x^2}}$

c) Dresser le tableau des variations de f.

d) Monter que f réalise une bijection de $[0,2[$ sur $[0,+\infty[$.

On note g sa fonction réciproque.

e) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

2) a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

b) Tracer dans le même repère C , T et C' la courbe de g.

c) Montrer que pour $x\in[0,+\infty[$, on a : $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

On admet dans la suite que g est dérivable sur $[3,4]$ et que pour tout $x\in]3,4[$, on a : $|g'(x)|\le\dfrac{4}{25}$.

3) Montrer que l'équation $g(x)=\dfrac{1}{2}x$ admet dans $]3,4[$ une solution unique α .

4) On considère la suite U définie sur IN par $\begin{cases} U_0\in\left]\dfrac{\alpha}{2},2\right[\\ U_{n+1}=g(2U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, on a : $\dfrac{\alpha}{2}<U_n<2$.

b) Montrer que $\left|U_{n+1}-\dfrac{\alpha}{2}\right|\le\dfrac{8}{25}\left|U_n-\dfrac{\alpha}{2}\right|$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

EXERCICE 4 **6 points**

Dans la figure ci-jointe :

- C est la courbe d'une fonction f , continue et dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right[$ dans un repère orthonormé.
- La demi tangente à C au point $A\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ passe par le point $B\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- La droite $\Delta : x=\dfrac{\pi}{4}$ est une asymptote verticale à C.

1) **Par lecture graphique :**

a) **Déterminer** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{f(x)}{x + \frac{\pi}{2}}$.

b) **Montrer que f réalise une bijection de** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$ **sur un intervalle J que l'on précisera.**

On note g sa fonction réciproque.

c) **Justifier la dérivabilité de g sur J.**

d) **Tracer C' dans le même repère.**

e) **Dresser le tableau des variations de g.**

2) **Dans la suite de l'exercice, on admet que pour tout réel** $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, **on a :** $f(x) = \dfrac{1}{1 - \tan x}$.

a) **Montrer que pour** $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, **on a :** $f'(x) = \dfrac{1 + \tan^2 x}{(1 - \tan x)^2}$.

b) **Montrer que pour tout** $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

3) **Soient h et k les fonctions définies sur** $]4, +\infty[$ **par** $h(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **et** $k = g \circ h$.

a) **Vérifier que si** $x \in]4, +\infty[$ **alors** $0 < h(x) < \dfrac{1}{2}$.

b) **Montrer que k est dérivable sur** $]4, +\infty[$ **et que pour tout** $x \in]4, +\infty[$ **on a :**

$$k'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}\left[2(h(x))^2 - 2h(x) + 1\right]}$$

c) **Calculer que** $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **et montrer que k réalise une bijection de** $]4, +\infty[$ **sur** $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$.

d) **Montrer que pour tout** $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, **on a :** $k^{-1}(x) = 4\left(\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)^2$.

Nom et prénom : ....4ème MATHS N° ....