

Lycée Martyr Wallid Méchlaoui Mornag	Devoir de synthèse 1	Le :08/12/2015 4 ^{ème} Math
Prof : Oueslati Mongi		Duré : 3 H

Exercice 1 (3 points)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit le point $A(1; 0)$ et les points M et M' d'affixes respectives z et $z' = \frac{z+1}{z-1}$

- 1) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement $|z|=1$
- 2) Montrer que $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) \equiv 0[2\pi]$
- 3) Dédire que (AO) est la bissectrice de $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'})$
- 4) Soit $M(z) \in C_{(0;1)} \setminus \{A\}$ et $M'(z')$. Donner une méthode de construction de M'

Exercice 2 (6 points)

Soit f une fonction définie sur $[0; \pi[$ par $f(x) = \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

- 1) a) Etudier la dérivabilité à droite en 0
Interpréter géométriquement le résultat.

b) Montrer que pour tout $x \in]0; \pi[$ on a $f'(x) = \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \cdot \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}}$

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = +\infty$

- 2) a) Dresser le tableau de variation de f
b) Montrer que f admet une réciproque qu'on note g
Déterminer $g(1)$

c) Montrer que pour tout $x > 0$; $g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$

3) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Déterminer $h'(x)$, en déduire que pour tout $x > 0$, $h(x) = \pi$

4) Soit u_n une suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Montrer que $g\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{1}{n}\right)$; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 3 (6 points)

Dans le plan orienté , on considère un rectangle ABCD de centre O tel que :

$$(\vec{AB}; \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{et} \quad AB=2AD$$

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(I)=J$
 b) Caractériser f
- 2) Soit $g = R_{(I; \frac{\pi}{2})}$ of
 a) Montrer que g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et que ICD triangle rectangle et isocèle en I
 b) Déterminer $g(A)$ et $g(I)$
 c) En déduire que le centre Ω de g est le milieu de [ID]
- 3) Soit h l'antidépacement tel que $h(A)=C$ et $h(I)=J$
 a) Montrer que $h(B)=D$
 b) Soit $E=h(C)$. Montrer que $DJ=DE$ et $(\vec{DJ}; \vec{DE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 c) En déduire que D est le milieu de [AE]
 d) Montrer alors que h est une symétrie glissante de vecteur \vec{AD} Et d'axe (IJ).

Exercice 4 (5 points)

Soit f_n une fonction définies sur IR par: $f_n(x) = x^3 + nx - n$; avec $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Vérifier que f_n est croissante sur IR
- 2) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique β_n dans $]0;1[$
 Vérifier que : $\beta_n^3 + n\beta_n = n$
- 3) a) Vérifier que $f_{n+1}(\beta_n) = \beta_n - 1$ et $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$
 b) Déterminer $f_{n+1}(\beta_{n+1}) - f_{n+1}(\beta_n)$; en déduire que β_n est croissante et que β_n est convergente