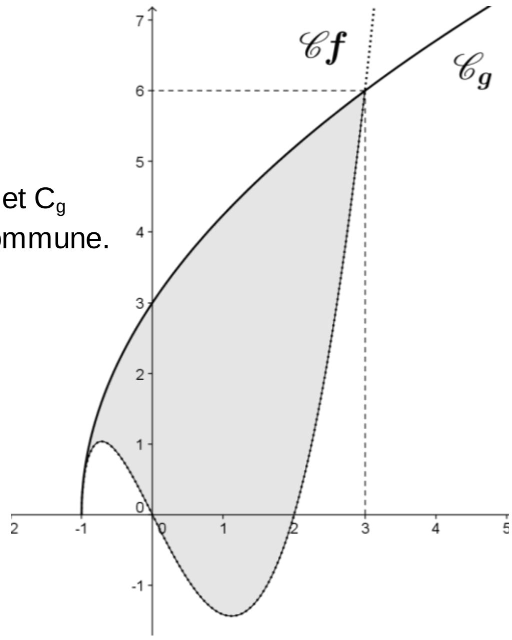
Lycée cité Amel Gabes	**Devoir de synthèse n°1**	**$4^{ème}$ Math**
Le 09-12-214	**Durée 3 h**	**Pr : Marzouk Ali**

<u>Exercice n°1</u> : (3points)



La figure ci-contre donne les courbes de f et g définies par :

$f(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x+1}$ et $g(x) = 3\sqrt{x+1}$

1)Déterminer graphiquement puis par calcul les positions relatives de C_f et C_g

2)Justifier qu'au point d'abscisse – 1 , C_f et C_g admettent une tangente commune.

3) M et N deux points appartiennent respectivement à C_f et C_g de même abscisse x de $[-1; 3]$.

On pose $\varphi(x) = MN$

Déterminer la valeur de x pour laquelle $\varphi(x)$ est maximale.

<u>Exercice n°2</u> : (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

b) Montrer que pour tout x appartient à $]1,+\infty[$ on a ; $f'(x)=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$

c)Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C)de f dans un repère orthonormé

2)a)Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur lui-même.

b) Soit x un réel de $]1,+\infty[$, calculer $fof(x)$ et en déduire $f^{-1}(x)$

c)En déduire que S_D , où D : $y=x$ laisse globalement invariant la courbe (C)

3)Soit n un entier naturel non nul,

a)Montrer que l'équation $f(x)=x^n$ admet une seule solution a_n et que $a_n \in]1,2[$

b)Montrer que $f(a_n)\le a_n^{n+1}$ en déduire que $a_n \ge a_{n+1}$

c)Montrer que la suite (a_n) est convergente .On note l sa limite.

4)a)Montrer que pour tout entier naturel p on a : $l \le a_p$

b) Montrer que $(l \succ 1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = f(l)$

c)En déduire que $l=1$

5) Soit la fonction φ définie sur $\left]0,\dfrac{\Pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} \varphi(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{\Pi}{2}\right[\\ \varphi\left(\dfrac{\Pi}{2}\right)=1 \end{cases}$

a)Montrer que φ est continue à gauche en $\dfrac{\Pi}{2}$

b) Montrer que pour tout x de $\left]0,\dfrac{\Pi}{2}\right]$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

c)Montrer que φ réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\Pi}{2}\right]$ sur $[1,+\infty[$

d)Montrer que φ^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'(x)$

Exercice n°3 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

E = C * D, F = C * B et I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct

1) a)Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}(2\pi)$

b)Montrer que : $r_{\left(A,\ \frac{\pi}{6}\right)} = S_{(AI)} o\, S_{(AD)}$

c)Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(I,\ \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta} o\, S_{(IA)}$

d) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = r_{\left(I,\ \frac{\pi}{3}\right)} o\, r_{\left(A,\ \frac{\pi}{6}\right)}$

2)a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f(E) = F

b)Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c)Montrer que f(D) = C

3) Soit g le antidéplacement tel que g(D) = C et g(C) = B

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) On désigne par Δ et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de g.

Montrer que g o g $= t_{2\vec{u}}$ et déterminer $\vec{u}$ et Δ

Exercice n°4 : (5 points)

Soit l'équation (E): $z^2 - 2(m+2i)z + 2m^2 + 4im - 4 = 0$; m est un paramètre complexe.

1) a) Résoudre dans C, l'équation (E).

b) Déterminer m pour que 2i soit solution de (E); préciser alors l'autre solution.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$,

On considère les point M, M_1 et M_2 d'affixes respectives: m, $z_1 = (1+i)m + 2i$ et $z_2 = (1-i)m + 2i$.

a) Montrer que : $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$.

b) En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation dont on précisera le centre I et l'angle α.

c)On suppose que m est non nul, et on note J le milieu de $[M_1M_2]$.

Montrer que J est l'image de M par une translation que l'on précisera.

Montrer que (IJ) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.

3) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) on associe le point M'(z')

tel que : $z' = i\bar{z} - 2 - 2i$

a)Montrer que g est un antidéplacement

b) Montrer que l'écriture complexe associée à l'application gog est $z'' = z - 4 - 4i$

c)Caractériser alors g.