Profs	Marrouki & Mechmeche	Devoir de synthèse N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	03/12/2013
Niveau	$4^{ème}$ Maths 1 & 2		Durée	3 h

Exercice 1 : QCM (4 pts)

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 0$

X	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	0

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
2) C_f admet deux points d'inflexions.
3) Il existe un réel $c \in]0\,;2[$ tel que $f''(c) = -\frac{1}{2}$
4) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ on a $f(x) \leq 2x$.
5) On peut avoir $f(2) = -1$
6) C_f admet en $+\infty$ une branche de direction $(o, \vec{j})$.

Exercice 2 : (6 pts)

I. Questions préliminaires :

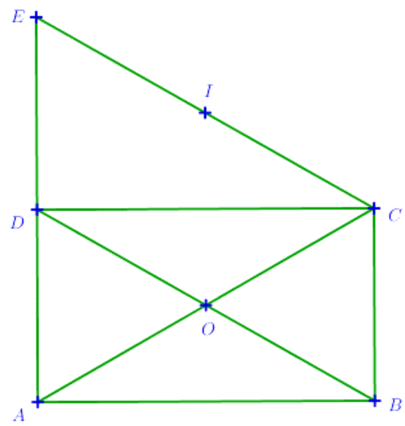
1) Montrer que deux déplacements f et g ayant un même angle α et qui coïncident sur un même point A sont égaux.

2) Soient g une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ, et D une droite telle que $g(D) = D$.

 a) Montrer par l'absurde que Δ et D ne peuvent pas être sécantes.

 b) Montrer par l'absurde que Δ et D ne peuvent pas être strictement parallèles.

 c) Conclure.



II. Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un rectangle de centre O, ACE un triangle équilatéral et I est le milieu de $[EC]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B) = A$ et $f(D) = E$.

 b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

2) Soit $g = t_{\overrightarrow{OA}} \circ r_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)}$

 a) Déterminer $g(B)$ puis montrer que $g = f$.

 b) Soit le point $F = f(A)$ montrer que $AOEF$ est un rectangle.

3) Soit φ un antidéplacement telle que $\varphi(I) = O$ et $\varphi((CB)) = (AE)$.

 a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer $\varphi((IO))$.

 b) En déduire les éléments caractéristiques de φ.

4) Soient $J = D * C$ et $\Delta = \text{méd}[CB]$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_\Delta \circ S_J$

Exercice 3 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $]1;2]$ par $f(x)=\sqrt{\frac{-x+2}{x-1}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1;2[$.
   b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter le résultat graphiquement.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1;2]$ sur $[0;+\infty[$.
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0.
   c) En déduire que f^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   d) Expliciter $f^{-1}(x)$.
   e) Tracer dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les courbes de f et f^{-1}.
3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $g_n(x)=f(x)-x^n,\ \ x\in\,]1;2]$
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'équation $f(x)=x^n$ admet une solution unique $\alpha_n\in\,]1;2]$.
   b) Montrer que $g_{n+1}(x)\le g_n(x)$ pour tout $x\in\,]1;2]$ et en déduire que (α_n) est décroissante.
   c) Déduire que (α_n) converge vers un réel l .
   d) Montrer que $1\le l\le\alpha_n$.
   e) Montrer que $l=1$.

Exercice 4 : (4 pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On pose $w=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et on note A le point d'affixe w.

1) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}$ $(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4)=1-z^5$
2) Calculer w^5 et montrer que $1+w+w^2+w^3+w^4=0$.
3) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ $\frac{1}{z^2}(1+z+z^2+z^3+z^4)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1$
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):T^2+T-1=0$
5) a) Montrer que $w+\frac{1}{w}$ est solution de (E)
   b) En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
6) Soient les points $K\left(-\frac{1}{4}\right)$ et $B(\frac{1}{2}i)$. Le cercle de centre K et de rayon KB coupe l'axe $(o,\vec{u})$ en un point H d'abscisse positive.
   a) Montrer que $OH=cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   b) Déterminer alors une construction du point A.

Bon travail.