Lycée Wallid Méchlaoui Mornag	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	Le :03/12/2013 $4^{\text{éme}}$ Math
Prof :Oueslati.Mongi		Durée : 3 H

Exercice n°1 (3 points)

1)Soit f la fonction définie sur [-1 ;1] par f(x)=x^2-lxl +2 . Peut –on appliquer théorème d'accroissement finie pour f sur [-1 ; 1]

2) Une suite u_n bornée est -elle convergente ? Justifier

l'exemple $u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+6} & si \quad n \quad paire \\ \dfrac{-1}{4n+2} & si \quad n \quad impaire \end{cases}$

3) La suite $u_n = (\sqrt{n^2+1}+n)\sin(\sqrt{n^2+1}-n)$ est -elle convergente ?

Exercice n°2 (5 points)

Soit α un réel de [0 ; π]

A) 1) Vérifier que $e^{2i\alpha} - 2i\sin\alpha.e^{i\alpha} = 1$

2) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i\sin\alpha e^{i\alpha} = 0$

B) Le plan P est rapportée à un repère orthonormée direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ .On prend l'unté graphique 4cm .Soient les points M ;

M' et M'' d'affixes respectives $e^{i\alpha}$; $e^{i\alpha}-1$ et $e^{i\alpha}+1$

1) a) Montrer que M=M'$*$M'' et que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

b) Placer M pour $\alpha \in]0;\frac{\pi}{6}[$ et construire alors les points M' et M''

2) Soit a=$\frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ un nombre complexe et $z_0=z_M$ pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$z_n=a^n z_0$ pour tout n de IN ; les points A_n d'affixe z_n

a) Écrivez a^2 puis a sous forme exponentielle

b) Placer les points A_2 et A_4 dans le même repère

c) Montrer que $z_{2n}=\frac{1}{2^n}e^{i\pi(\frac{5n+1}{6})}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} OA_{2n}$

Exercice n°3 (5 points)

Soit AIC un triangle équilatérale tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; $r_{(A;\frac{-\pi}{6})}(C) = B$ et

$S_{(AC)}(I) = J$; faire une figure

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A)=I et f(B)= C

b) Déterminer l'angle de f et construire le centre K

c) Montrer que KCAB est un losange

2) Soit g la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer g(I) et g(A)

b) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .Montrer que OBC est un triangle équilatérale puis en déduire g(O)

c) Soit O' le centre du cercle circonscrit au triangle BCK . Montrer que g(B)=O'

d) Déterminer gog(I) et gog(O)

3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h vérifiant h(O)=O' et h(I)=J

b) Montrer que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que l'axe Δ de h ;est la droite passant par B∗C et parallèle à (AB)

d) Soit S le symétrie de I par rapport à Δ .Quelle est le vecteur de la symétrie glissante h

Exercice n°4 (7 points)

Soit la fonction f définie sur]-1 ;1[par $f(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Vérifier f'(x)=$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$)

1) a) Etudier les variations de f

b) Soit φ la fonction définie sur]-1 ;1[par φ(x)=f(x)-x

Etudier les variations de φ puis déduire le signe de φ(x) suivant les valeurs de x

c)Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans]-1 ;1[puis vérifier $\alpha \in]\frac{4}{5};1[$

d)Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de]-1 ;1[sur IR

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère

3) Soit u_n une suite réelle définie par $u_0 \in [0;\alpha]$ et $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$ pour tout n de IN

a) Montrer que $u_n \in [0;\alpha]$; pour tout $n \in IN$, et que u_n est croissante

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) Soit h la fonction définie sur]-1 ;1[par : h(x)= $f[(\cos\frac{\pi}{2}(x+1)]$

a) Montrer que pour tout x de]-1 ;1[on a h(x)=$-1+\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}(x+1)}$

b) Montrer que h réalise une bijection de]-1 ;1[sur IR et que h^{-1}, la réciproque de h , est dérivable sur IR et que $(h^{-1})'(x)=\frac{-2}{\pi[(x+1)^2+1]}$ pour tout réelle x

5) Soit H la fonction définie sur IR* par : H(x)=$h^{-1}(x-1)+h^{-1}(\frac{1}{x}-1)$

Montrer que H est dérivable sur IR* et calculer H'(x) puis calculer $h(\frac{1}{2})$ et $h(-\frac{1}{2})$