Lycée : *Thelepte*

Mhamdi Abderrazek

4-12-2012

Devoir de synthése N°1

Mathématiques

$4^{ème}$maths

Durée : 3heures

Exercice 1 (3points) :

Répondre par vrai ou faux au questions suivantes (aucune justification n'est demandée)

1).La fonction $x \longmapsto \frac{|2x-3|}{\sqrt{x^2+x+1}}$ admet au moins une primitive sur IR.

2). La fonction $x \longmapsto (2x+1)^5$ est une primitive sur IR de la fonction $x \longmapsto 5(2x+1)^4$.

3).Deux isométries qui coïncident en trois points sont égales.

Exercice 2 (6points) :

Soit ABCD un carré direct de centre O. Les points I , J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CD].

1).Le plan complexe est munie du repère orthonormé (O ;$\vec{OJ}$;$\vec{OK}$).

On considère l'application g : P→ P ; M (z) ↦M'(z') tel que z'=-i z.

a).Montrer que g est une isométrie.

b).Caractériser g.

2).Soit R la rotation qui transforme C en J et J en O.

a).Préciser l'angle de R.

b).Déterminer R $\mathbf{o}$ R(C). En déduire le centre Ω de R.

3).Préciser R(O) puis R(I). En déduire la nature exacte du triangle ΩID.

4).Soit $\varphi = t_{\vec{CJ}}$ $\mathbf{o}$ R. Préciser φ(O) et φ(C) .En déduire que φ =g.

Exercice 3 (5points) :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O ,$\vec{u}$,$\vec{v}$)

1). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(3+i)z+2(1+i)=0$.

2).Soit l'équation (E_θ) : $z^2-(3+i)e^{i\theta}z+2(1+i)e^{2i\theta}=0$.($\theta \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$)

a).Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E).

b). Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .

3).On considère les points A , B et C d'affixes respectives a=2$e^{i\theta}$; b=(1+i) $e^{i\theta}$ et c=i$e^{i\theta}$.

a).Donner la forme exponentielle de b et c.

b).Montrer que (OA)⊥(OC) et (BO)⊥(BA).

c).Construire les points A,B et C pour une valeur de θ choisie arbitrairement dans]0 ;$\frac{\pi}{2}$[.

4).a).Montrer que OABC est un trapèze (∀ θ ∈[0 ;$\frac{\pi}{2}$])

b).Vérifier que l'aire de ce trapèze est constante (∀ θ ∈[0 ;$\frac{\pi}{2}$]).

<u>Exercice 4</u> (6points) :

On considère la fonction f définie sur [0 ;$\frac{\pi}{4}$] par f(x)=$\sqrt{\sin(2x)}$ et on désigne par c_f sa courbe dans un repère Orthonormé (O ,$\vec{i}$,$\vec{j}$)

1).Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.Interpréter ce résultat graphiquement.

2).a).Montrer que f est dérivable sur]0 ;$\frac{\pi}{4}$] et calculer f'(x) (∀x ∈]0 ;$\frac{\pi}{4}$]).

b).Dresser le tableau de variation de f puis tracer c_f.

3).a). Montrer que f est bijective de [0 ;$\frac{\pi}{4}$] sur [0 ;1]. (on notera g la fonction réciproque de f).

b).Etudier la dérivabilité de g à droite en0 et à gauche en 1.

c). Montrer que g est dérivable sur]0 ;1[et que g'(x)=$\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (∀x ∈]0 ;1[).

4).a).Montrer que , ∀ $n \in IN^*$,l'équation f(x)=$\frac{1}{n}$ admet dans [0 ;$\frac{\pi}{4}$] une unique solution $\alpha_n$puis calculerα_1.

b).Montrer que (α_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente vers une limite à calculer.

BON TRAVAIL

Exercice1 :

1).Vrai. 2).Faux. 3).Faux.

Exercice2 :

1).a).Soit les points $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; g(M_1)= $M'_1(z'_1)$ etg(M_2)= $M'_2(z'_2)$.

On a $M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = |-i(z_2 - z_1)| = |-i||z_2 - z_1| = M_1M_2$ signifie **g est une isométrie**.

b).<u>Ensemble de points invariants par g</u> :M est invariant par g signifie g(M(z)) =M(z) signifie z=- i z

signifie (1+i) z = 0 signifie z = 0 signifie M = O signifie g est la rotation de centre O et d'angle
$\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})\ [2\pi] \equiv \arg(\frac{z'}{z})\ [2\pi] \equiv \arg(-i)\ [2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$,d'où **g est la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$** .

2).a).On a R(C)= J et R(J)=O donc l'angle de R est $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{JO}})\ [2\pi] \equiv ((\widehat{\overrightarrow{JC};\overrightarrow{JO}}) + \pi)[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

b).R **o** R(C) = R(J)=O ;On a R **o** R $= r_{(\Omega;\frac{-\pi}{2})}$ **o** $r_{(\Omega;\frac{-\pi}{2})} = r_{(\Omega;\pi)} = S_\Omega$ (où S_Ω est **la symétrie centrale de centre Ω**)

d'où Ω est le milieu du segment [CO].

3).i)On a ΩO=ΩK et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega K}}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ donc **R(O) = K.**

ii)On a O=I*K donc R(O)=R(I)*R(K) alors K=R(I)*C or K=D*C d'où **R(I)=D.**

iii).On a R(I)=D donc $r_{(\Omega;\frac{-\pi}{2})}$(I)=D alors ΩI=ΩD et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ et par suite **ΩID est un triangle isocèle**

et rectangle en Ω .

4). φ**(O)**= $t_{\overrightarrow{CJ}}$ **o** R(O)= $t_{\overrightarrow{CJ}}$ (K)=**O** et φ**(C)**= $t_{\overrightarrow{CJ}}$ **o** R(C)= $t_{\overrightarrow{CJ}}$ (J)=**B**.

On a φ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ donc φ est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$

Or φ(O)=O alors $\varphi = r_{(O;\frac{-\pi}{2})}$ **= g.**

Exercice3 :

1). (E): $z^2 - (3+i)z + 2(1+i) = 0$. On a Δ= (-(3+i))²-4(2(1+i))=-2i=(1-i)² ; soit δ=1-i une racine de Δ

Donc z_1=(-b+δ)/2a=2 et z_2=(-b-δ)/2a=1+i d'où $S_{\mathbb{C}}$**={2 ; 1+i }**

2).a). $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E) signifie $(ze^{-i\theta})^2 - (3+i)(ze^{-i\theta}) + 2(1+i) = 0$ signifie
$e^{-2i\theta}(z^2 - (3+i)e^{i\theta}z + 2(1+i)e^{2i\theta}) = 0$ signifie $z^2 - (3+i)e^{i\theta}z + 2(1+i)e^{2i\theta} = 0$ signifie z est une solution . de (E_θ) .

b).On a $z'_1e^{-i\theta} = z_1$ et $z'_2e^{-i\theta} = z_2$ signifie $z'_1 = 2e^{i\theta}$et $z'_2 = (1+i)e^{i\theta}$ d'où $S_{\mathbb{C}}$**={2$e^{i\theta}$; (1+i)$e^{i\theta}$}.**

3).a).**b=(1+i)** $e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$; **c= i** $e^{i\theta}=e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

b).∗). $\frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\frac{c}{a}=\frac{i}{2}$ imaginaire pur signifie $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ signifie (OA) ⊥ (OC).

∗). $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}=\frac{b-a}{b}$=-i imaginaire pur signifie $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OB}$ signifie (AB) ⊥ (OB).

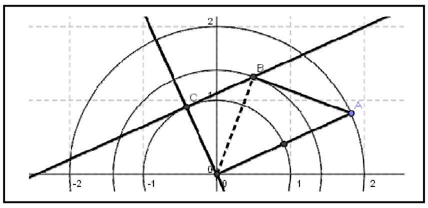
c).<u>Construction des points A ;B et C pour une valeur de θ choisie arbitrairement dans]0 ;$\frac{\pi}{2}$[:</u>

On a : a=2 $e^{i\theta}$ signifie OA = 2 et $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OA}})\equiv\theta[2\pi]$ signifie **A**∈ $\zeta_{(O;2)}$ **et** $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OA}})\equiv\theta[2\pi]$

On a : b=$\sqrt{2}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ signifie OB =$\sqrt{2}$ et $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}})\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$ signifie **B**∈ $\zeta_{(O;\sqrt{2})}$ **et** $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}})\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$.

On a : C=$e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ signifie OC =$\sqrt{2}$ et $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OC}})\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ signifie **C**∈ $\zeta_{(O;1)}$ **et** $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OC}})\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$.

4).∗) $\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}=\frac{b-c}{a}=\frac{1}{2}$ est réel signifie **(BC)∥ (OA)** signifie OABC est **un trapèze**.



∗).$\mathcal{A}$**(OABC)** $=\frac{(CB+OA)OC}{2}=\frac{3}{2}$ **u.a** (constante (∀ $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}]$)).

Exercice4 :

1). On a $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\sin(2x)}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\sin(2x)}{x}}=+\infty$ (car $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ et $\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\sin(2x)}{x}}=\sqrt{2}$)

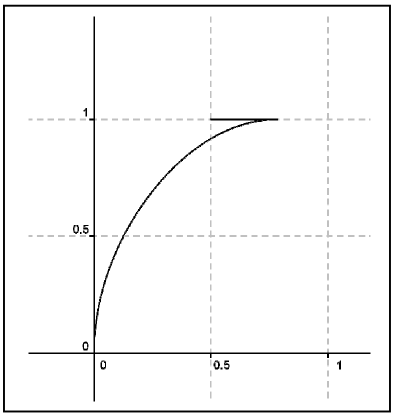
Donc f n'est pas dérivable en 0^+ et par conséquent c_f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente parallèle à (O,$\vec{j}$) dirigée vers le haut.

2).a).On a la fonction x↦sin(2x) est dérivable sur]0 ;$\frac{\pi}{4}$] et sin(2x) > 0 ∀ x ∈]0 ;$\frac{\pi}{4}$] donc f est dérivable sur]0 ;$\frac{\pi}{4}$].

et on a f '(x)= $\frac{2\cos(2x)}{2\sqrt{\sin(2x)}}=\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

b).

X	0	$\frac{\pi}{4}$
f '(x)	+	
f	0 ↗	1



3).a).On a f est continue et strictement croissante sur [0 ;$\frac{\pi}{4}$] donc f est bijective de [0 ;$\frac{\pi}{4}$] sur f([0 ;$\frac{\pi}{4}$])=[0 ;1].

b). ∗)On a c_f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente parallèle à (O,$\vec{j}$) donc c_g admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente parallèle à (O,$\vec{i}$) alors g est dérivable à droite en 0 et on a $g'_d(0)$=0.

*) On a c_f admet au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ une demi-tangente parallèle à $(O,\vec{i})$ donc c_g admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente parallèle à $(O,\vec{j})$ alors g n'est dérivable à gauche en 1 .

c).On a f est dérivable sur $]0\,;\frac{\pi}{4}[$ et $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]0\,;\frac{\pi}{4}[$ donc g est dérivable sur $f(]0\,;\frac{\pi}{4}[)=]0\,;1[$.

On a $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ or $f'(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(2x)}}{f(x)} = \frac{\sqrt{(1-f^4(x))}}{f(x)}$ de plus on a $f(g(x))=x$ donc $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

$(\forall x \in]0\,;1[)$.

4).a).f est bijective sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ et $\frac{1}{n} \in f([0\,;\frac{\pi}{4}])=[0\,;1]$ donc $\forall n \in IN^*$ l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ une unique solution α_n et on a $f(\alpha_1)=1$ signifie $\alpha_1 = g(1)=\frac{\pi}{4}$.

b).*) On a g est strictement croissante sur $[0\,;1]$(car f est strictement croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$) et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ alors

$g(\frac{1}{n+1}) < g(\frac{1}{n})$ donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ d'où (α_n) est décroissante.

*) On a (α_n) est **décroissante** et **minorée** par 0 donc (α_n) est **convergente**.

*) On a $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} g(\frac{1}{n})$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = \mathbf{0}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \mathbf{0}$.